

數學甲考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(2)	(4)	(1)(5)	(2)(4)	(3)(5)	(1)(5)
8.						
(1)(2)(4)						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：利用直線方向向量、參數式求兩點最短距離

解析：甲、乙兩車行駛的方向向量分別 $(30, -40)$ 、 $(60, 0)$

假設兩車位置為

$$\text{甲：}\begin{cases} x = -30 + 30t \\ y = 40 - 40t \end{cases}, \text{乙：}\begin{cases} x = -20 + 60t \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{則兩車距離為 } & \sqrt{(10 + 30t)^2 + (-40 + 40t)^2} \\ &= \sqrt{2500t^2 - 2600t + 1700} \\ &= \sqrt{2500\left(t - \frac{13}{25}\right)^2 + 1024} \end{aligned}$$

$$\text{當 } t = \frac{13}{25} = 0.52 \text{ 時，}$$

兩車最接近距離(最小值)為 32 公里，故選(5)。

2. (2)

出處：選修數學甲(上)〈極限與函數〉

目標：利用左、右極限判斷函數極限是否存在

解析：先求得 $f(x)$ 、 $\frac{x}{|x|}$ 兩函數的左、右極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = -1$$

(1) $\times$ ： $f(x)$ 左右極限不相同，極限不存在

(2) $\circ$ ： $f(x) \cdot \frac{x}{|x|}$ 左右極限相同，極限為 -1

(3) $\times$ ：左極限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (-1)}{x} = -\infty$ ，極限不存在

(4) $\times$ ： $(f(x))^2$ 左右極限相同，極限為 1

(5) $\times$ ： $x \cdot f(x)$ 左右極限相同，極限為 0

故選(2)。

3. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理與組合綜合運用

解析：因為從第二個點心開始，都有 2 種選擇，扣除星期五若還剩 2 個點心，則最後一個點心一定要星期五吃，只有一個選擇，再決定 6 個點心哪些要吃巧克力，方法數為 $(2^5 - 1) \cdot C_3^6 = 620$ (種)
故選(4)。

二、多選題

4. (1)(5)

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：利用因式分解解多項式方程式

解析：明顯整數 1 為方程式的實根，

$$\begin{aligned} \text{方程式 } x^3 + x - 2 &= 0 \text{ 可以因式分解為} \\ (x - 1)(x^2 + x + 2) &= 0, \end{aligned}$$

所以當 x 為虛根時， $x^2 + x = -2$

當 x 為實根 1 時， $x^2 + x = 2$

則 $x^2 + x$ 有兩個可能值為 ± 2 ，故選(1)(5)。

5. (2)(4)

出處：第四冊〈機率〉

目標：綜合不同條件計算條件機率

解析：令兩箱中球數較少(或相等)有 r 顆紅球、 w 顆白球，

其中 $0 \leq r \leq 3$ 、 $0 \leq w \leq 3$ 、 $1 \leq r + w \leq 3$ ，

$$\text{則乙取出紅球機率為 } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{r+w} + \frac{3-r}{6-(r+w)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{6r}{r+w} - r + (3-r)}{6-(r+w)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{6r}{r+w} + (3-2r)}{6-(r+w)}$$

根據 $r + w = 1, 2, 3$ 三種可能，

$$\text{可得乙取出紅球的機率為 } \begin{cases} \frac{3+4r}{10}, & r+w=1 \\ \frac{3+r}{8}, & r+w=2 \\ \frac{1}{2}, & r+w=3 \end{cases}$$

當 $r=1, w=0$ 時，最大可能值為 $\frac{7}{10}$ ，

當 $r=0, w=1$ 時，最小可能值為 $\frac{3}{10}$

(1) $\times$ ：可能會不等於 $\frac{1}{2}$

(2) $\circ$ ：當 $r=1, w=0$ 時

(3) $\times$ ：當 $r=0, w=1$ 時，最小值為 $\frac{3}{10}$

(4) $\circ$ ：當 $r+w=3$ 時

(5) $\times$ ：當 $r=1, w=0$ 時，紅球少的反而機率高 $\left(1 > \frac{2}{5}\right)$

故選(2)(4)。

6. (3)(5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：利用指數律或觀察選項代入解指數方程式

解析：因為 $(\sqrt[4]{x})^{\sqrt{x}} = (x^{\frac{1}{4}})^{\sqrt{x}} = (x^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \text{ 在區間 } (0.69, 1) \text{ 內}$$

所以 $\sqrt[4]{x}$ 恰有兩個可能值為 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ ，

故指數方程式 $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$ 的可能解為 $\frac{1}{16}$ 或 $\frac{1}{256}$

故選(3)(5)。

〈另解〉

將選項代入：觀察選項可假設 $x = 2^{-n}$ ，

$$\text{可得 } \sqrt[4]{x} = 2^{-\frac{n}{4}} \Rightarrow x^{\sqrt{x}} = (2^{-n})^{(2^{-\frac{n}{4}})} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow -n \cdot 2^{-\frac{n}{4}} = -2 \Rightarrow 2^{-\frac{n}{4}} = \frac{2}{n}$$

選項 $(n=1, 2, 4, 6, 8)$ 代入後只有 $n=4, 8$ 符合
故選(3)(5)。

7. (1)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：由中垂線觀念轉換成圓與直線求交點

解析：點 P 在 $\overline{AB}$ 的中垂線上 $\Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$ ，

代表以 P 為圓心、 $\overline{PA}$ 為半徑的圓會過 A 、 B 兩點，

此圓方程式為 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 125$ ，

B 點為此圓與直線 L 的交點，

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 125 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$$

將直線 $y = 2x - 18$ 代入圓方程式，

$$\text{可得 } (x-1)^2 + (2x-17)^2 = 125 \Rightarrow 5(x^2 - 14x + 33) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-11) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ 或 } 11, \text{ 代回直線 } L \text{ 可得}$$

$$(x, y) = (3, -12) \text{ 或 } (11, 4) \text{ (割線與圓恰有兩交點)}$$

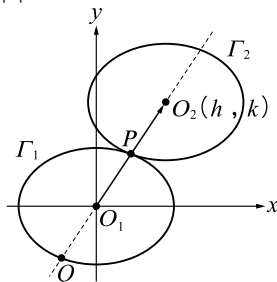
故選(1)(5)。

8. (1)(2)(4)

出處：選修數學甲(下)〈二次曲線〉、第三冊〈平面向量〉

目標：橢圓方程式、參數式與向量平行性質運用

解析：令 Q 為 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 與 Γ_1 除了 P 點外的另一個交點，
如下圖所示



(1) $\bigcirc$ ：因為橢圓的對稱性(O_1 為 $\overline{PQ}$ 的中點)，

可得點 Q 坐標為 $(-4 \cos \theta, -3 \sin \theta)$ ，

平移後 Q 點恰平移到點 P ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{QP} = (8 \cos \theta, 6 \sin \theta)$$

故 O_2 坐標為 $(8 \cos \theta, 6 \sin \theta)$

(2) $\bigcirc$ ： $\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{O_1P} \Rightarrow P$ 為 $\overline{O_1O_2}$ 的中點

(3) $\times$ ：非零向量 $\overrightarrow{v} = (8 \cos \theta, 6 \sin \theta)$ 與向量 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 不平行(其中 $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$)

$$(4) \bigcirc$$
： $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{4\sqrt{65}}{5} = 2\sqrt{\frac{52}{5}} \Rightarrow \overrightarrow{O_1P} = \sqrt{\frac{52}{5}}$ ，

$$\text{即 } 16 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta = \frac{52}{5},$$

$$\Rightarrow 7 \cos^2 \theta + 9 = \frac{52}{5} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\text{可得 } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{v} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}} \right) // (2, 3)$$

(5) $\times$ ：同(4)

故選(1)(2)(4)。

三、選填題

9. $\frac{8}{17}$

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：矩陣在平面上線性變換的應用

$$\text{解析：根據題意 } \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{可得 } \begin{cases} 4 \cos \theta - \sin \theta = 1 \\ 4 \sin \theta + \cos \theta = 4 \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{8}{17}.$$

10. $\pi - 6 + 3\sqrt{3}$

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：三角比正弦定理、弧度與度轉換、扇形面積計算

$$\text{解析：} \angle ODB = \angle OAE = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OBD = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

$$\text{在 } \triangle OBD \text{ 中，由正弦定理知 } \frac{\overline{OD}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 75^\circ}$$

$$\text{可得線段長 } \overline{OD} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 6 - 2\sqrt{3}$$

故灰色區域面積

$$= 60^\circ \text{ 扇形面積} - \triangle OBD \text{ 面積} - (30^\circ \text{ 扇形面積} - \triangle OAE \text{ 面積})$$

$$= 30^\circ \text{ 扇形面積} - \triangle OBD \text{ 面積} + \triangle OAE \text{ 面積}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OD} \cdot \sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OE} \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (6 - 2\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \pi - 6 + 3\sqrt{3}.$$

11. $\sqrt{1105}$

出處：選修數學甲(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：複數乘法計算

$$\text{解析：考慮等式 } (9 + ai) \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i \right) = -6 + bi \text{ 的實部}$$

$$\text{可得 } \frac{18}{5} - \frac{3a}{10} = -6 \Rightarrow a = 32$$

$$\text{故 } |z_1| = \sqrt{81 + a^2} = \sqrt{1105}.$$

第貳部分：混合題或非選擇題

12. (5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：坐標化空間向量內積計算夾角餘弦

$$\text{解析：因為 } \overrightarrow{AB} = (-3, 4, 0), \overrightarrow{CD} = (3, 4, 0),$$

$$\text{所以兩向量夾角餘弦值為 } \frac{(-3, 4, 0) \cdot (3, 4, 0)}{25} = \frac{7}{25}$$

故選(5)。

13. (3)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：空間向量平行、垂直判斷

$$\text{解析：因為 } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \frac{h}{5} \overrightarrow{CD} \text{ 且 } \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \frac{5-h}{5} \overrightarrow{AB}$$

所以 $PQRS$ 為平行四邊形

又因為兩向量 $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 0)$ ， $\overrightarrow{CD} = (3, 4, 0)$ 不垂直(內積為 7)，所以四個角都不是直角

當 $h = 2.5$ 時，四個邊相等為菱形，

其餘情況為非菱形平行四邊形，故選(3)(5)。

14. (1) $\frac{24h(5-h)}{25}$; (2) $\frac{260}{27}$

出處：第四冊〈空間向量〉、選修數學甲(上)〈積分〉

目標：利用外積或夾角正弦值計算空間平行四邊形面積、三次多項式積分

解析：(1) $A(h) = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}|$

$$= \frac{h(5-h)}{25} \cdot |(3, 4, 0) \times (-3, 4, 0)|$$

$$= \frac{h(5-h)}{25} \cdot \left| \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{24h(5-h)}{25}$$

〈另解〉

承 12. 題，因為 $\cos \angle SPQ = \frac{7}{25}$

所以 $\sin \angle SPQ = \frac{24}{25}$

故 $A(h) = h \cdot (5-h) \cdot \frac{24}{25} = \frac{24h(5-h)}{25}$ 。

(2) 所求體積為

$$\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{24}{25} (5x - x^2) dx = \frac{24}{25} \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}} = \frac{260}{27}。$$

◎評分原則

(1) $A(h) = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}|$ (1 分)

$$= \frac{h(5-h)}{25} \cdot |(3, 4, 0) \times (-3, 4, 0)|$$

$$= \frac{h(5-h)}{25} \cdot \left| \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{24h(5-h)}{25}$$
 (2 分)

〈另解〉

承 12. 題，因為 $\cos \angle SPQ = \frac{7}{25}$

所以 $\sin \angle SPQ = \frac{24}{25}$ (1 分)

故 $A(h) = h \cdot (5-h) \cdot \frac{24}{25} = \frac{24h(5-h)}{25}$ 。 (2 分)

(2) 所求體積為 $\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{24}{25} (5x - x^2) dx$ (1 分)

$$= \frac{24}{25} \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\frac{5}{3}}^{\frac{10}{3}} = \frac{260}{27}。 (2 分)$$

15. (1)(2)

出處：第一冊〈直線與圓〉、選修數學甲(上)〈微分〉

目標：直線與拋物線求交點、利用算幾不等式解 k 範圍

解析：利用 $y' = 2x$ 可知過 A 點的切線斜率 $2a$ ，

所以法線方程式為 $L_A: y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$ ，

與拋物線 $y = x^2$ 解聯立方程式，

將 (x, y) 代入 (k, k^2) ，並同除以 $k - a (\neq 0)$

可得 $k + a = -\frac{1}{2a} \Rightarrow k = -a - \frac{1}{2a} \leq -\sqrt{2}$

且當 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 時， $k = -\sqrt{2}$ ；當 $a \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 時， $k < -\sqrt{2}$

故選(1)(2)。

16. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩法線與拋物線交於一點，求兩點 x 坐標的關係式

解析：承 15. 的結論，可推導得 $k = -a - \frac{1}{2a} = -b - \frac{1}{2b}$

$$\Rightarrow a - b = \frac{a - b}{2ab} \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$$

故選(4)。

17. (1) $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a^2}\right)$; (2) $2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量內積、平行、垂直性質運用

解析：(1) 令 $\overline{BK}$ 的中點為 $M\left(\frac{b+k}{2}, \frac{b^2+k^2}{2}\right)$ ，

因為 $b = \frac{1}{2a}$ 、 $k = -a - \frac{1}{2a}$

所以 $\begin{cases} b + k = -a \\ b^2 + k^2 = \frac{1}{4a^2} + a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} = a^2 + 1 + \frac{1}{2a^2} \end{cases}$

可得中點坐標為 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a^2}\right)$ 。

(2) 等腰三角形 ABK 中， $\overline{AM} \perp \overline{BK}$

化簡 $\overline{KB} = (b - k, b^2 - k^2) // (1, b + k) = (1, -a)$

可得 $\overline{KB} \perp (a, 1)$ (因向量內積 $(1, -a) \cdot (a, 1) = 0$)

$\Rightarrow \overline{MA} = \left(\frac{3a}{2}, \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4a^2}\right) // (a, 1)$

$\Rightarrow \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow a^4 - 4a^2 - \frac{1}{2} = 0$

故 $a^2 = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

◎評分原則

(1) 令 $\overline{BK}$ 的中點為 $M\left(\frac{b+k}{2}, \frac{b^2+k^2}{2}\right)$ ，

因為 $b = \frac{1}{2a}$ 、 $k = -a - \frac{1}{2a}$

所以 $\begin{cases} b + k = -a \\ b^2 + k^2 = \frac{1}{4a^2} + a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} = a^2 + 1 + \frac{1}{2a^2} \end{cases}$

可得中點坐標為 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a^2}\right)$ 。 (2 分)

(2) 等腰三角形 ABK 中， $\overline{AM} \perp \overline{BK}$

化簡 $\overline{KB} = (b - k, b^2 - k^2) // (1, b + k) = (1, -a)$

可得 $\overline{KB} \perp (a, 1)$ (因向量內積 $(1, -a) \cdot (a, 1) = 0$) (1 分)

$\Rightarrow \overline{MA} = \left(\frac{3a}{2}, \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4a^2}\right) // (a, 1)$

$\Rightarrow \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow a^4 - 4a^2 - \frac{1}{2} = 0$

故 $a^2 = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。 (2 分)