數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(2)	(3)	(1)	(5)	(2)	(1)(2)(3)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)(3)(5)	(2)(3)(5)	(2)(3)(5)	(1)(3)(4)	(1)(3)(4)(5)		

第壹部分、選擇題

一、單選題

1. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：圖表的數據分析

解析：觀察圖表，

65 歲老年人口佔比約於 2025 年達 20 %

故選(2)。

2. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數律

解析：$\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}-1}=\dfrac{3^2+\frac{1}{3}}{3-1}=\dfrac{14}{3}$

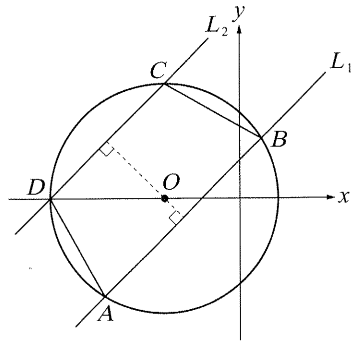
故選(2)。

3. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用點到直線的距離判別四邊形形狀

解析：C：$x^2+y^2+4x-5=0\Rightarrow(x+2)^2+y^2=9$，可知圓 C 的圓心 $O(-2,0)$，半徑 $r=3$



$d(O,L_1)=\dfrac{|-2+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$d(O,L_2)=\dfrac{|-2+5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

因為 $d(O,L_1)<d(O,L_2)$，所以 $\overline{AB}>\overline{CD}$

又 $L_1 // L_2$，故 A、B、C、D 四個點所形成的凸四邊形為梯形

故選(3)。

4. (1)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：有系統的計數，不盡相異物排列

解析：$4\ \underbrace{\boxed{1}\,\boxed{2}}_{\text{視為同物}}\ \underbrace{3\ 5\ 5}_{\text{視為同物}}$ ：$\dfrac{6!}{2!3!}=60$

故選(1)。

5. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：數列與級數、二次函數概念的連結與計算

解析：令 $f(n)=an^2+bn+c$

因為 $a_1=3$，$a_2=6$，$a_3=10$，則

$$\begin{cases}a_1=f(0)\\a_1+a_2=f(1)\\a_1+a_2+a_3=f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=c\\3+6=a+b+c\\3+6+10=4a+2b+c\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=4\\c=3\end{cases}$$

$\Rightarrow f(n)=2n^2+4n+3$

故選(5)。

6. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：期望值

解析：一份保單的期望值為

$$\frac{2}{2300}\times(500-100000)+\left(1-\frac{2}{2300}\right)\times500-500\times20\ \%$$

≈ 313

因此，保險公司賣出一百萬份保單獲利的期望值約為

$313\times10^6=3.13\times10^8$，較接近 3 億元

故選(2)。

二、多選題

7. (1)(2)(3)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比

解析：(1) ○：10：09 轉半圈，恰在最高點

(2) ○：10：07 是最高點 10：09 的 2 分鐘前，

10：12 是 10：09 的 3 分鐘之後，

越接近 10：09 越高，

故 10：07 的高度比 10：12 的高度還高

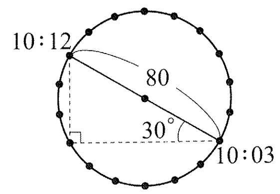
(3) ○：10：04 為最高點 10：09 的 5 分鐘前，

10：14 為最高點 10：09 的 5 分鐘後，

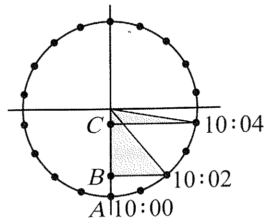
因此兩者的高度相同

(4) ╳：10：12 時的高度比 10：03 時的高度還高

$80\times\sin 30^\circ=40$ 公尺，如下圖



(5) ╳：當角度變為兩倍時，$\overline{AC}\neq2\overline{AB}$，如下圖



故選(1)(2)(3)。

8. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：熟悉指數與常用對數的定義與運算

解析：$\log a=2.1\Leftrightarrow a=10^{2.1}$

$\log b=4\Leftrightarrow b=10^4$

(1) ╳：$a\times b=10^{2.1}\times10^4=10^{6.1}$

(2) ○：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{10^{2.1}}{10^4}=10^{-1.9}$

(3) ○：$10^{c+d}=10^c\times10^d=21$，則 $c+d=\log 21$

(4) ╳：$3a=3\times10^{2.1}\approx 300$

$\dfrac{b}{7}=\dfrac{10^4}{7}\approx 1428$，故 $3a<\dfrac{b}{7}$

(5) ○：當 n 越大時，$\log n$ 與 10^n 亦越大

所以 $b>a>d>c$

故選(2)(3)(5)。

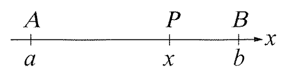
9. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

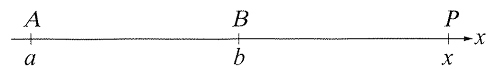
目標：能了解絕對值的意義與分點公式

解析：已知 $a<b$ 且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$，有兩種情況

Case 1：$P(x)$ 點介於 $A(a)$、$B(b)$ 兩點之間



Case 2：$P(x)$ 點在點 $B(b)$ 右側



(1) ╳：應改為 $|x-a|=2|x-b|$

(2) ○：若 $x=5$ 且 $b=7$，則為 Case 1 之情形，

配合 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ 可推論 $a=1$

(3) ○：Case1 時，由內分點公式可得

$x=\dfrac{a+2b}{3}=\dfrac{2a+4b}{6}>\dfrac{3a+3b}{6}=\dfrac{a+b}{2}$

Case 2 時，顯然正確

(4) ╳：Case 1 時，由內分點公式可得

$x=\dfrac{a+2b}{3}=\dfrac{5a+10b}{15}>\dfrac{6a+9b}{15}=c$

Case 2 時，顯然 $x>c$

(5) ○：若 $|x-a|-|a-b|=|x-b|$，

由絕對值的意義可知為 Case 2，此時

$\overline{AB}:\overline{BP}=1:1$，

故點 $B(b)$ 為 $A(a)$、$P(x)$ 兩點的中點，

即 $b=\dfrac{x+a}{2}$

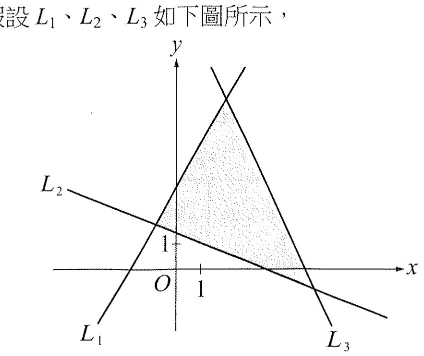
故選(2)(3)(5)。

10. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：判別二元一次不等式的圖形

解析：假設 L_1、L_2、L_3 如下圖所示，



$x+ay+b\geq0$ 表示在直線的右半平面，

$cx+y+d\geq0$ 表示在直線的上半平面，

$x+ey+f\leq0$ 表示在直線的左半平面，

因此 $cx+y+d=0$ 為直線 L_2，

$x+ey+f=0$ 為直線 L_3，

$x+ay+b=0$ 為直線 L_1

(1) ╳：由圖形知 $x+ay+b\geq0$ 在直線的下半平面

$\therefore a<0$

(2) ○：承(1)，原點 $(0,0)$ 在直線 L_1 的右半平面，

即 $(0,0)$ 滿足 $x+ay+b\geq0$

$\Rightarrow b>0$

(3) ○：由圖形知 $cx+y+d\geq0$ 在直線的右半平面

$\therefore c>0$

(4) ╳：直線 L_2：$cx+y+d=0$ 與 y 軸的交點為 $(0,-d)$

$-d>1\Rightarrow d<-1$

(5) ○：$x+ey+f\leq0$ 表示在直線 L_3 的左半平面，同時也是下半平面 $\Rightarrow e>0$

直線 L_3：$x+ey+f=0$ 的斜率 $\dfrac{-1}{e}<-1$

$\Rightarrow\dfrac{1}{e}>1\Rightarrow e<1$

故選(2)(3)(5)。

11. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：相關係數、標準化數據、最適合直線的性質

解析：(1) ○：依題意知 $\mu_x=\dfrac{50}{10}=5$，$\mu_y=\dfrac{20}{10}=2$，

且 y 對 x 的最適合直線必通過 (μ_x,μ_y)，

即所求最適合直線通過 $(6,5)$ 與 $(5,2)$ 兩點，

利用兩點求直線方程式為

$y-2=\dfrac{5-2}{6-5}(x-5)\Rightarrow y=3x-13$，

故斜率為 3

(2) ╳：承(1)，最適合直線為 $y=3x-13$，

但相關係數為 0.8，

故 (x_1,y_1) 不一定在最適合直線上

(3) ○：標準化數據 y' 對 x' 的最適合直線斜率等於相關係數 0.8

(4) ○：標準化後數據 $\sigma_x'=1$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{(x_1')^2+(x_2')^2+\cdots\cdots+(x_{10}')^2}{10}-0^2}=1$

$\Rightarrow(x_1')^2+(x_2')^2+\cdots\cdots+(x_{10}')^2=10$

(5) ╳：最適合直線斜率 $=3=(0.8)\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}>1$

$\Rightarrow\sigma_x<\sigma_y$

故選(1)(3)(4)。

12. (1)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能了解多項式函數圖形的意義

解析：(1)○：三次函數 $y=g(x)$ 的對稱中心點為 $\left(-2,\frac{17}{4}\right)$ 且過點 $\left(-4,\frac{9}{4}\right)$，可得點 $\left(0,\frac{25}{4}\right)$ 亦在圖形上

(2)╳：二次函數 $y=h(x)$ 通過點 $\left(-4,\frac{9}{4}\right)$ 與點 $\left(5,\frac{9}{4}\right)$，則對稱軸為 $x=\frac{1}{2}$

(3)○：函數 $y=f(x)$ 過點 $\left(5,\frac{9}{4}\right)$，可知 $y=f(x)-\frac{9}{4}$ 必過點 $(5,0)$，即 $y=f(x)-\frac{9}{4}$ 有因式 $x-5$

(4)○：由圖形可知 $f(x)$ 的領導係數小於 0，當領導係數越小時，圖形往左上升、往右下降的速度越快

(5)○：設 $y=g(x)=(x+2)^3+t(x+2)+\frac{17}{4}$，代入點 $\left(0,\frac{25}{4}\right)$ 解得 $t=-3$

故選(1)(3)(4)(5)。

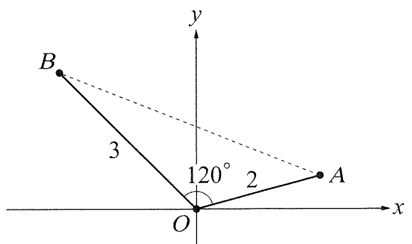
三、選填題

13. $\sqrt{19}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理

解析：觀察△AOB 圖形，已知∠$AOB=120°$，



利用餘弦定理

$\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos120°=19$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{19}$。

14. $\frac{3}{5}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：取捨原理、複合事件的機率性質

解析：所求$=P$(顏色相異)$+P$(號碼乘積為奇數)$-P$(顏色相異且號碼乘積為奇數)

$$=\frac{C^{10}_1\cdot C^5_1+C^8_2-C^5_1\cdot C^3_1}{C^{15}_2}$$

$$=\frac{3}{5}。$$

15. $(1,5)$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：利用已知不等式範圍找出符合的多項式，並利用多項式除法原理(餘式定理)求餘式

解析：利用不等式解的範圍可得

$f(x)=1(x+5)(x+2)^2$

$=(x^2+4x+3)q(x)+r(x)$

$=(x+1)(x+3)q(x)+r(x)$

再利用除法或餘式定理求出餘式 $r(x)=x+5$

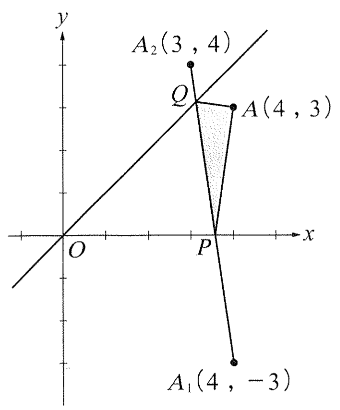
故數對 $(a,b)=(1,5)$。

16. $5\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用對稱點求最短距離

解析：



先作 $A(4,3)$ 對 x 軸的對稱點得 $A_1(4,-3)$，

再作 $A(4,3)$ 對直線 $y=x$ 的對稱點得 $A_2(3,4)$，

連接 $\overline{A_1A_2}$，分別與 x 軸交於點 P，與直線 $y=x$ 交於點 Q，

此時 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 有最小值為

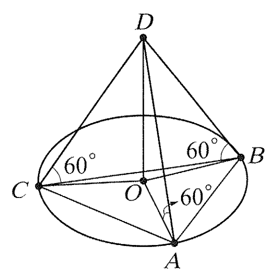
$\overline{A_1A_2}=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$。

17. $9\sqrt{15}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：利用正弦定理處理三角測量問題

解析：如下圖，設 D 在地面的投影點為 O，點 O、A、B、C 皆在水平地面上



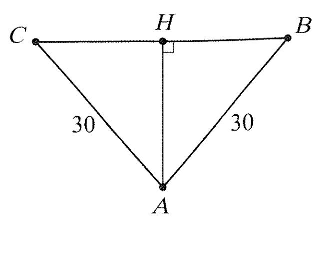
因 A、B、C 三點的俯角皆同(相當於 A、B、C 三點仰望熱氣球 D 的仰角皆同)，

所以 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$，

即點 O 為△ABC 的外心，

且 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$ 為△ABC 的外接圓半徑 R

△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=30$ 公尺，$\overline{BC}=40$ 公尺，



$\overline{AH}=10\sqrt{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R\Rightarrow R=9\sqrt{5}$

熱氣球高度 $\overline{OD}=R\times\tan60°$

$=9\sqrt{5}\times\sqrt{3}=9\sqrt{15}$。

第貳部分、混合題

18. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：觀察數列的規律與特性

解析：(1)○：$a_5=1+2+3+4+5=15$

(2)╳：$a_{n+1}-a_n=n+1$

(3)○：$a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(4)╳：$b_5-b_4=a_5$ 等於邊長為 5 的三角形數，即 15

(5)○：若要堆出邊長為 5 的正四面體，方式為最底層先排出邊長為 5 的正三角形，其上一層再排成邊長為 4 的正三角形，依此方式堆疊至最上層是 1 顆球，因此

$b_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=1+3+6+10+15=35$

故選(1)(3)(5)。

19. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$，說明略

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：利用數列的規律並求和

解析：

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2$

$b_3=b_2+a_3$

$\vdots$

$+)\ b_n=b_{n-1}+a_n$

$b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

$=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1\times(1+1)}{2}+\frac{2\times(2+1)}{2}+\frac{3\times(3+1)}{2}+\cdots\cdots+\frac{n^2+n}{2}$

$=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。

〈另解〉

觀察數列 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=10$，$b_4=20$，

猜測 $b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

由題目之敘述知數列〈b_n〉滿足遞迴式 $b_n=b_{n-1}+a_n$

接著用數學歸納法證明 $b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立

(1)當 $n=1$，$b_1=1=\frac{1\times2\times3}{6}$ 成立

(2)設當 $n=k$ 時，$b_k=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，

$b_{k+1}=b_k+a_{k+1}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$，

則當 $n=k+1$，原式亦成立。

由數學歸納法得知，$b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立。

◎評分原則

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2$

$b_3=b_2+a_3$

$\vdots$

$+)\ b_n=b_{n-1}+a_n$

$b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ (2 分)

$=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$ (2 分)

$=\frac{1\times(1+1)}{2}+\frac{2\times(2+1)}{2}+\frac{3\times(3+1)}{2}+\cdots\cdots+\frac{n^2+n}{2}$

$=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]$ (2 分)

$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$ (2 分)

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。 (2 分)

〈另解〉

觀察數列 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=10$，$b_4=20$，

猜測 $b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (2 分)

由題目之敘述知數列〈b_n〉滿足遞迴式 $b_n=b_{n-1}+a_n$ (2 分)

接著用數學歸納法證明 $b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立

(1)當 $n=1$，$b_1=1=\frac{1\times2\times3}{6}$ 成立 (1 分)

(2)設當 $n=k$ 時，$b_k=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立， (1 分)

則當 $n=k+1$ 時，

$b_{k+1}=b_k+a_{k+1}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$，

則當 $n=k+1$，原式亦成立。 (3 分)

由數學歸納法得知，$b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立。 (1 分)