

臺北區 109 學年度第二學期

指定科目第一次模擬考試

數學乙參考答案暨詳解



版權所有・翻印必究

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(4)	(3)	(3)	(2)(3)	(1)(4)(5)	(1)(5)			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：首數與位數的關係

解析：將 $M=9.5$ 代入 $\log E=4.8+1.5M$ ，

得 $\log E=4.8+1.5\times 9.5=19.05=19+0.05$ ，即首數為 19

因此能量 E 為 20 位數，故選(4)。

2. (3)

難易度：難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數的最大值、最小值問題

解析： $f(x)=ax^2-2ax+b$

$$=a(x^2-2x)+b$$

$$=a(x-1)^2+b-a$$

此二次函數圖形的對稱軸為 $x=1$

又 $f(3)>0$ ， $f(4)<0$ ，故 $a<0$

則在區間 $-1\leq x\leq 2$ 的最大值為 $f(1)=b-a=8$ ①

最小值為 $f(-1)=b+3a=4$ ②

由①、②解得 $a=-1$ ， $b=7$ ，則 $2a+b=5$

故選(3)。

3. (3)

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：不盡相異物的排列

解析：4 塊黑色及 4 塊白色的正方形壁磚，任取 6 塊，共有三種情形：

① 4 黑 2 白，② 3 黑 3 白，③ 2 黑 4 白，排列 6 個不同位置

共有 $\frac{6!}{4!2!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!4!}=15+20+15=50$ 種不同的圖案，故選(3)。

二、多選題

4. (2)(3)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：古典機率、條件機率

解析：(1) $\times$ ：3 顆球顏色均相同有兩種情形：3 紅或 3 白

$$\text{其機率為 } \frac{C_3^3+C_3^3}{C_3^8}=\frac{1}{28}$$

(2) $\circ$ ：3 顆球顏色均相異有一種情形：1 紅 1 白 1 黑

$$\text{其機率為 } \frac{C_1^3\times C_1^3\times C_1^2}{C_3^8}=\frac{9}{28}$$

(3) $\circ$ ：3 顆球顏色共有三種情形：均相同，均相異，恰為兩種顏色

$$\text{由(1)、(2)可知，其機率為 } 1-\frac{1}{28}-\frac{9}{28}=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$$

(4) $\times$ ：3 顆球中，有紅球也有白球共有三種情形：2 紅 1 白或 1 紅 2 白或 1 紅 1 白 1 黑

$$\text{其機率為 } \frac{C_2^3\times C_1^3+C_1^3\times C_2^3+C_1^3\times C_1^3\times C_1^2}{C_3^8}=\frac{9}{14}$$

(5) $\times$ ：設 A 為取出的球中有紅球也有白球的事件， B 為取出的球顏色均相異的事件
在 A 事件發生的條件下， B 事件也發生的機率為

$$P(B|A)=\frac{\frac{9}{28}}{\frac{14}{9}}=\frac{1}{2}$$

故選(2)(3)。

5. (1)(4)(5)

難易度：難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：除法原理、餘式定理、勘根定理

解析：由除法原理可知

$f(x)=(x^2-3x)Q(x)+(3x-13)=x(x-3)Q(x)+(3x-13)$ ，其中 $Q(x)$ 為商式

(1) $\circ$ ：因為 $f(0)=-13$ ，故 $f(x)$ 除以 x 的餘式為 -13

(2) $\times$ ： $f(0)=-13<0$ ， $f(3)=-4<0$ ，

所以 $f(x)=0$ 在 0 與 3 之間不一定有實根

(3) $\times$ ： $f(0)+0=-13<0$ ， $f(3)+3=-1<0$ ，

所以 $f(x)+x=0$ 在 0 與 3 之間不一定有實根

(4) $\circ$ ： $f(0)+0^2=-13<0$ ， $f(3)+3^2=5>0$ ，

所以 $f(x)+x^2=0$ 在 0 與 3 之間必有實根

(5) $\circ$ ： $f(0)+0^3=-13<0$ ， $f(3)+3^3=23>0$ ，

所以 $f(x)+x^3=0$ 在 0 與 3 之間必有實根

故選(1)(4)(5)。

6. (1)(5)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：算術平均數、標準差、相關係數、迴歸直線

解析：設 X 的算術平均數為 μ_X ，標準差為 σ_X

Y 的算術平均數為 μ_Y ，標準差為 σ_Y

則 $\mu_X=\frac{70+72+74+76+78}{5}=74$ (元)， $\mu_Y=\frac{5+6+4+2+3}{5}=4$ (千盒)

X	Y	$x_i-\mu_X$	$y_i-\mu_Y$	$(x_i-\mu_X)^2$	$(y_i-\mu_Y)^2$	$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)$
70	5	-4	1	16	1	-4
72	6	-2	2	4	4	-4
74	4	0	0	0	0	0
76	2	2	-2	4	4	-4
78	3	4	-1	16	1	-4
總和				40	10	-16

(1) $\circ$ ： $\mu_X=74$ (元)

(2) $\times$ ： $\sigma_Y=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}>1.4$

(3) $\times$ ： X 與 Y 的相關係數為 $r=\frac{-16}{\sqrt{40}\times\sqrt{10}}=\frac{-16}{20}=-0.8$

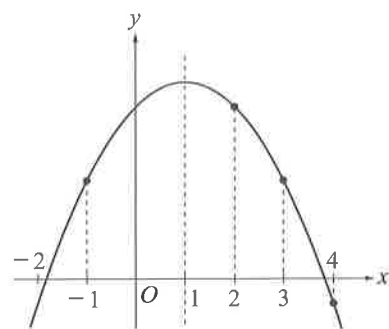
(4) $\times$ ： $\sigma_X=\sqrt{\frac{40}{5}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

迴歸直線的斜率 $m=r\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=(-0.8)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-0.4$

故迴歸直線方程式為 $y-4=(-0.4)(x-74)\Rightarrow y=33.6-0.4x$

(5) $\circ$ ：當售價定為 75 元時，預測市場需求為 $y=33.6-0.4\cdot 75=3.6$ (千盒)

故選(1)(5)。



三、選填題

A. -2

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數函數的應用

解析：由題意可得 $\frac{f(3)}{f(9)} = \frac{3 \times 2^{-3k}}{3 \times 2^{-9k}} = \frac{1}{4096} \Rightarrow 2^{6k} = 2^{-12} \Rightarrow 6k = -12 \Rightarrow k = -2$ 。

B. $-\frac{15}{16}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：乘法反矩陣的應用

解析： $\because \det(A) \neq 0$ ，故 A^{-1} 存在，可得 $A^{-1}A^3 = A^{-1}A$ ，所以 $A^2 = I_2$

$$\begin{bmatrix} -4 & k \\ 16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & k \\ 16 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 16+16k & 0 \\ 0 & 16k+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{可得 } 16+16k=1 \Rightarrow k = -\frac{15}{16}。$$

C. $\frac{1}{4}$

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的線性組合、面積與二階行列式

解析： $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (2t+4, 3t+2)$

$\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為 $\left| \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = |12-4| = 8 = a$ ，

又 $a=8b$ ，故 $b=1$

$$\triangle OAP \text{ 的面積為 } b = \frac{1}{2} \times \left| \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2t+4 & 3t+2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \times |4(3t+2) - 2(2t+4)| = \frac{1}{2} \times |8t| = 1$$

$$\Rightarrow t = \pm \frac{1}{4} \text{ (負不合)}, \text{ 故 } t = \frac{1}{4}。$$

D. $\frac{35\sqrt{2}}{2}$

難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量內積的應用、面積與二階行列式

解析：假設 $x_1 = \alpha$ ，由 $x_1 + x_2 = 0$ 可得 $x_2 = -\alpha$

又 Q 、 R 兩點在直線 $x+y=0$ 上，故 $y_1 = -x_1 = -\alpha$ ， $y_2 = -x_2 = \alpha$

因此 Q 、 R 兩點坐標為 $Q(\alpha, -\alpha)$ 、 $R(-\alpha, \alpha)$

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha-4, -\alpha-3) \cdot (-\alpha-4, \alpha-3) = 0$$

$$\Rightarrow -(\alpha-4)(\alpha+4) - (\alpha+3)(\alpha-3) = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{25}{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle PQR \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} \times \left| \begin{vmatrix} \alpha-4 & -\alpha-3 \\ -\alpha-4 & \alpha-3 \end{vmatrix} \right| &= \frac{1}{2} |(\alpha-4)(\alpha-3) - (\alpha+4)(\alpha+3)| \\ &= \frac{1}{2} \times |-14\alpha| = 7 \times |\alpha| = 7 \times \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{35}{\sqrt{2}} = \frac{35\sqrt{2}}{2}。 \end{aligned}$$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y \geq 5 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 3x+6y \geq 12 \end{cases}$ ，目標函數為 $P=1250x+1100y$ ；(2)略；(3)當 $x=2$ ， $y=3$ 時，可使公司所給付的工資為最少，

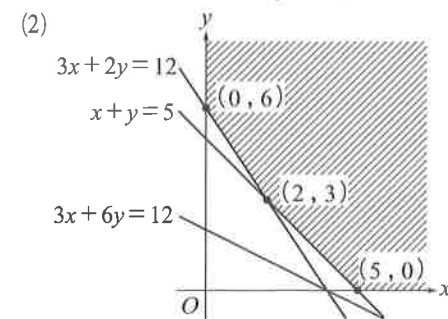
此時所給付的最少工資為 5800 元

難易度：易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1)線性規劃不等式為 $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y \geq 5 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 3x+6y \geq 12 \end{cases}$ ，目標函數為 $P=1250x+1100y$ 。



(3)由頂點法得知目標函數 P 的最大值發生在可行解區域的頂點上

(x, y)	$(0, 6)$	$(2, 3)$	$(5, 0)$
$P=1250x+1100y$	6600	5800	6250

故當 $x=2$ ， $y=3$ 時，可使公司所給付的工資為最少，此時所給付的最少工資為 5800 元。

二、(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ；(2) 300 萬；(3) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 55 & 10 \end{bmatrix}$ ；(4) 11

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣運算及應用

解析：(1)由題意可表示為 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，故 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(2)所求即為 b_3 ，由(1)可得

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = P \left(P \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \right) = P^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = P^2 \left(P \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \right) = P^3 \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}，$$

$$\text{則 } \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix}，\text{ 可得 } b_3 = 300$$

故經過三次傳播之後 B 病毒的數量為 300 萬。

$$(3) P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}，P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}，P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}，\dots\dots \text{可推出規律 } P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所求 } P + P^2 + P^3 + \dots\dots + P^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \dots\dots + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 55 & 10 \end{bmatrix}。$$

(4)所求即為 b_n ，

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100n \end{bmatrix}，$$

經過 n 次傳播後 B 病毒的數量為 $100n$ 萬，由題意 $100n > 1000 \Rightarrow n > 10$

故 n 的最小值為 11。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

- 一、(1) $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y \geq 5 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 3x+6y \geq 12 \end{cases}$ ，目標函數為 $P=1250x+1100y$ ；(2)略；(3)當 $x=2, y=3$ 時，可使公司所給付的工資為最少，

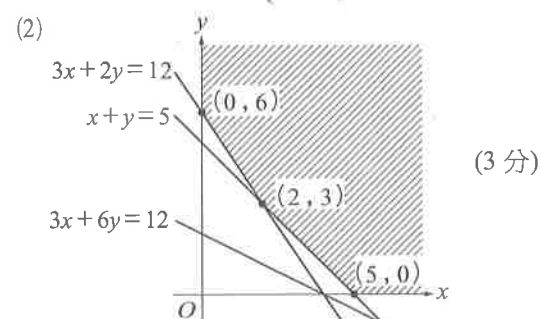
此時所給付的最少工資為 5800 元

難易度：易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1)線性規劃不等式為 $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y \geq 5 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 3x+6y \geq 12 \end{cases}$ (4 分)，目標函數為 $P=1250x+1100y$ 。(1 分)



(3)由頂點法得知目標函數 P 的最大值發生在可行解區域的頂點上

(x, y)	$(0, 6)$	$(2, 3)$	$(5, 0)$
$P=1250x+1100y$	6600	5800	6250

(3 分)

故當 $x=2, y=3$ 時，可使公司所給付的工資為最少，此時所給付的最少工資為 5800 元。(3 分)

- 二、(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ；(2) 300 萬；(3) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 55 & 10 \end{bmatrix}$ ；(4) 11

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣運算及應用

解析：(1)由題意可表示為 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，故 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。(3 分)

(2)所求即為 b_3 ，由(1)可得

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = P \left(P \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \right) = P^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = P^2 \left(P \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \right) = P^3 \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, (2 \text{ 分})$$

$$\text{則 } \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix}, \text{ 可得 } b_3 = 300$$

故經過三次傳播之後 B 病毒的數量為 300 萬。(1 分)

$$(3) P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \dots \text{可推出規律 } P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} (2 \text{ 分})$$

$$\text{所求 } P + P^2 + P^3 + \dots + P^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 55 & 10 \end{bmatrix}. (1 \text{ 分})$$

(4)所求即為 b_n ，

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100n \end{bmatrix}, (2 \text{ 分})$$

經過 n 次傳播後 B 病毒的數量為 $100n$ 萬，由題意 $100n > 1000 \Rightarrow n > 10$

故 n 的最小值為 11。(1 分)