臺北區 109 學年度第二學期
指定科目第一次模擬考試

數學甲參考答案暨詳解

99363315-29

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(1)	(4)	(2)	(1)(4)(5)	(2)(4)	(2)(3)	(2)(4)(5)	(1)(2)(5)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

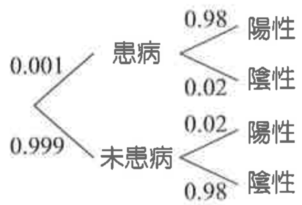
目標：能運用貝氏定理計算條件機率

解析：由貝氏定理，所求

$$p=\frac{P(\text{此人患病})P(\text{檢驗呈陽性}\mid\text{此人患病})}{P(\text{此人患病})P(\text{檢驗呈陽性}\mid\text{此人患病})+P(\text{此人未患病})P(\text{檢驗呈陽性}\mid\text{此人未患病})}$$

$$=\frac{0.001\times0.98}{0.001\times0.98+0.999\times0.02}=\frac{98}{98+1998}\approx\frac{100}{100+2000}=\frac{1}{21}\approx0.05$$

故選(1)。



2. (4)

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：能理解向量的線性組合並計算平行四邊形區域面積

解析：$\overrightarrow{OA}=(1,6)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,3)$

$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 所張出的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}1 & 6\\ -3 & 3\end{vmatrix}\right|=21$，

又 $|r|\leq1$，$|s|\leq1$，即 $-1\leq r\leq1$，$-1\leq s\leq1$

因此所求 P 點所形成的區域面積為〔$1-(-1)$〕×〔$1-(-1)$〕×21＝84，故選(4)。

3. (2)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：能理解空間向量內積的意義並能操作內積的分配律

解析：(1) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF})=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+0=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}$

(2) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG})=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EB}+0=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EB}$

(3) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EB}\cdot(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CH})=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+0=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}$

(4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EB}\cdot(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DI})=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}+0=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}$

(5) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EJ}=0$

又在 $\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{ED}$ 中，$\overrightarrow{EB}$ 長度最長且和 $\overrightarrow{EB}$ 的夾角最小，則內積之值最大，故選(2)。

二、多選題

4. (1)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：操作多項式函數的四則運算、函數圖形的平移，以及透過除法原理找出餘式

解析：(1)○ (2)╳：將 $(x+2)^3+c(x+2)$ 展開得

$(x^3+6x^2+12x+8)+(cx+2c)=x^3+6x^2+(12+c)x+(8+2c)$

和 ax^3+6x^2+2x+b 比較係數可得 $a=1$，$2=12+c$，$b=8+2c$，解得 $a=1$，$b=-12$，$c=-10$

(3)╳：將 $y=x^3$ 的圖形向左平移 2 單位可得到 $y=(x-(-2))^3$，即 $y=(x+2)^3$ 的圖形，而非 $y=f(x)$ 的圖形

(4)○：將 $c=-10$ 代入 $f(x)=(x+2)^3+c(x+2)$ 得

$f(x)=(x+2)^3-10(x+2)=(x+2)$〔$(x+2)^2-10$〕，

故 $f(x)=0$ 有三個相異實根 -2，$-2\pm\sqrt{10}$

(5)○：$f(x)$ 除以 $(x+2)^3$ 的餘式為 $c(x+2)=-10x-20$ 為一次多項式

故選(1)(4)(5)。

5. (2)(4)

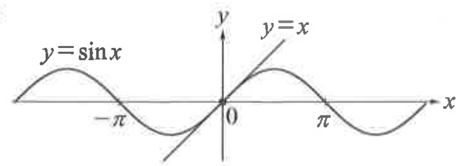
難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

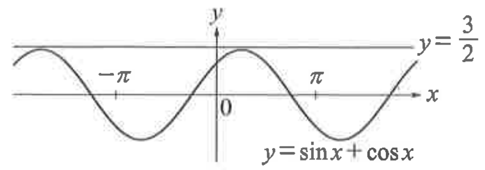
目標：能繪製多項式函數、指數函數、對數函數、三角函數的圖形，並透過圖形的交點找出方程式解的個數

解析：如下列各圖，若兩函數圖形有交點即表示方程式有實數解

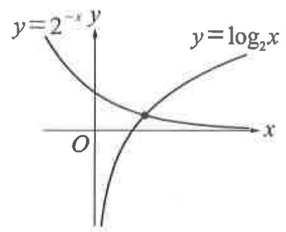
(1)╳：



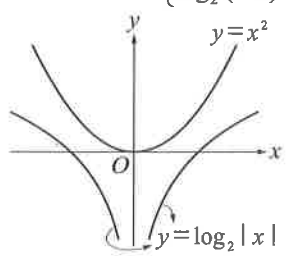
(2)○：$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，如下圖所示



(3)╳：



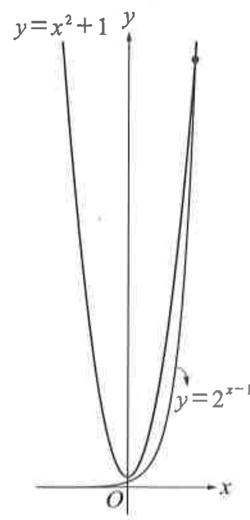
(4)○：$y=\log_2|x|=\begin{cases}\log_2 x，x>0\\ \log_2(-x)，x<0\end{cases}$ 的圖形為 $y=\log_2 x$ 的圖形與其對稱於 y 軸圖形的聯集，如下圖所示



(5)╳：當 $x=6$ 時，$2^{6-1}=32<37=6^2+1$

當 $x=7$ 時，$2^{7-1}=64>50=7^2+1$

故在 6 與 7 之間兩圖形有交點，如下圖所示



故選(2)(4)。

6. (2)(3)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：能知道隨機變數、對數的意義，並能計算二項分布的期望值、變異數、標準差

解析：設投擲此硬幣一次，出現正面的機率為 p

(1)╳：$\because \dfrac{p_0}{p_{18}}=\dfrac{C_0^{18}p^0(1-p)^{18}}{C_{18}^{18}p^{18}(1-p)^0}=\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{18}$　$\therefore \log_3\dfrac{p_0}{p_{18}}=\log_3\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{18}=18\log_3\dfrac{1-p}{p}=36$

$\log_3\dfrac{1-p}{p}=2\Rightarrow\dfrac{1-p}{p}=9$，解得 $p=\dfrac{1}{10}$

(2)○：設隨機變數 X 表示正面出現的次數，則隨機變數 X 是參數為 $\left(18,\dfrac{1}{10}\right)$ 的二項分布

$\Rightarrow E(X)=18\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{5}$(次)

(3)○：由(2)可知 $E(X)=\dfrac{9}{5}$(次)，且 $\mathrm{Var}(X)=18\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{81}{50}$

又 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2$，所求 $E(X^2)=\mathrm{Var}(X)+(E(X))^2=\dfrac{81}{50}+\left(\dfrac{9}{5}\right)^2=\dfrac{243}{50}$

(4)╳：設隨機變數 Y 表示玩一局遊戲所獲得的獎金，則 $Y=10X+2$

$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(10X+2)=10^2\mathrm{Var}(X)=100\times\dfrac{81}{50}=162$

(5)╳：對小明而言，每玩一局遊戲獲得金額的期望值為

$E(Y)-25=E(10X+2)-25=10E(X)+2-25=10\times\dfrac{9}{5}+2-25=-5$ (元)，所以此遊戲對小明是不利的

故選(2)(3)。

7. (2)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第四冊第三章〈矩陣〉

目標：能操作矩陣乘法、理解空間中外積的意義，隨後依此計算平行四邊形面積、正射影長、四面體的體積

解析：$\because \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -6 \\ 0 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

由矩陣乘法定義可知

$|\overrightarrow{a}|^2=25$，$|\overrightarrow{b}|^2=16$，$|\overrightarrow{c}|^2=9$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-6$

$\therefore|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=4$，$|\overrightarrow{c}|=3$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-6$

(1)╳：設 $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}=\dfrac{-6}{4\times3}=-\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=120^\circ$

(2)○：所求面積為 $\sqrt{|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2-(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2}=\sqrt{4^2\times3^2-(-6)^2}=6\sqrt{3}$

(3)╳：$\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影長為 $\left|\left(\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|^2}\right)\overrightarrow{c}\right|=\dfrac{|\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{c}|}=\dfrac{6}{3}=2$

(4)○：三非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 滿足 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，得到 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$

又由(2)可知平行四邊形面積 $|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin120^\circ=6\sqrt{3}\neq0$，得 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\neq\overrightarrow{0}$

$\because\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$ 為非零向量　$\therefore\overrightarrow{a}\,//\,(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$

(5)○：所求四面體體積為 $\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})|=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|=\dfrac{1}{6}\times5\times6\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

故選(2)(4)(5)。

8. (1)(2)(5)

難易度：難

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：知道複數平面上複數極式的意義，並能理解其幾何意涵與棣美弗定理

解析：(1)○：由複數的幾何意涵可知

$z_1=1\cdot\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1+i$

(2)○：由複數的幾何意涵可知

$z_{n+1}=z_n\cdot\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=z_n\cdot\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=z_n(1+i)=(1+i)z_n$

由(1)，(2)可知對於所有自然數 n 皆有 $z_n=(1+i)^n$

(3)╳：$|z_7-z_5|=|(1+i)^7-(1+i)^5|=|((1+i)^2-1)(1+i)^5|=|(2i-1)(1+i)^5|=|2i-1||1+i|^5$

$=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{2})^5=4\sqrt{10}$

(4)╳：$(z_3)^8=((1+i)^3)^8=\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{24}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{24}$，

利用棣美弗定理得

$(z_3)^8=(\sqrt{2})^{24}\left(\cos\dfrac{24\pi}{4}+i\sin\dfrac{24\pi}{4}\right)=2^{12}=4096$，故 z_3 不滿足方程式 $z^8-256=0$

(5)○：$(z_5)^2=((1+i)^5)^2=\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{10}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{10}$

$=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\dfrac{10\pi}{4}+i\sin\dfrac{10\pi}{4}\right)=32i$

故 z_5 滿足方程式 $z^2-32i=0$

故選(1)(2)(5)。

三、選填題

A. $\dfrac{1}{9}$

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：能理解對數律，並依此來進行對數運算

解析：$\because\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

$\therefore\log_x a=\dfrac{1}{\log_a x}=2$，$\log_x b=\dfrac{1}{\log_b x}=3$，$\log_x c=\dfrac{1}{\log_c x}=4$

所求為 $\log_{abc}x=\dfrac{1}{\log_x abc}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}=\dfrac{1}{2+3+4}=\dfrac{1}{9}$。

B. $\left(\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3}{2}\right)$

難易度：易

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：能運用空間中平面的法向量與直線的方向向量求出方程式，並能透過直線參數式求出平面與直線之交點

解析：平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{OA}=(1,-1,1)$ 且平面 E 過點 $A(1,-1,1)$，

故平面 E 的方程式為 $x-y+z=3$

直線 L 的方向向量為 $\overrightarrow{OB}=(1,0,1)$ 且過原點 $O(0,0,0)$，

故直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases}$，$t$ 為實數，代入平面方程式得 $t-0+t=3$，故 $t=\dfrac{3}{2}$

得直線 L 與平面 E 的交點坐標為 $\left(\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3}{2}\right)$。

C. $\sqrt{101}$

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：知道複數平面上複數絕對值的意義，將問題轉化成坐標平面，透過直線方程式及其圖形與對稱點解決最大值、最小值問題

解析：令複數 $z=x+yi$，x，y 為實數

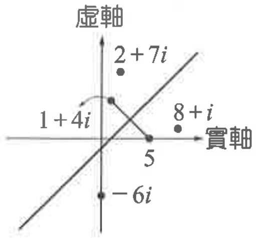
$|(x+yi)-(2+7i)|=|(8+i)-(x+yi)|$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-7)^2=(8-x)^2+(1-y)^2 \Rightarrow y=x-1$

又 $(5,0)$ 之於 $y=x-1$ 的對稱點為 $(1,4)$

所求 $|z-5|+|z-(-6i)|=|z-(1+4i)|+|z-(-6i)|\le|(1+4i)-(-6i)|$

$=|1+10i|=\sqrt{101}$



第貳部分：非選擇題

一、(1)略；(2) $\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$；(3)略

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：知道複數平面上複數的幾何意涵，並能依此連結至矩陣運算與線性變換

解析：(1) $(1+\sqrt{3}i)^n=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow a_n=2^n\cos\frac{n\pi}{3}$，$b_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$

$\Rightarrow a_n^2+b_n^2=2^{2n}\cos^2\frac{n\pi}{3}+2^{2n}\sin^2\frac{n\pi}{3}=2^{2n}\left(\cos^2\frac{n\pi}{3}+\sin^2\frac{n\pi}{3}\right)=2^{2n}\Rightarrow\sqrt{a_n^2+b_n^2}=2^n$。

(2)由 $(1+\sqrt{3}i)^{n+1}=(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^n$ 可得

$a_{n+1}+b_{n+1}i=(1+\sqrt{3}i)(a_n+b_ni)=(a_n-\sqrt{3}b_n)+(\sqrt{3}a_n+b_n)i$

$\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}=a_n-\sqrt{3}b_n\\ b_{n+1}=\sqrt{3}a_n+b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，故 $T=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$。

(3)〈解法一〉

①令 $A(a,0)$，$C(0,a)$，$B(a,a)$，$a>0$，知 $\overline{OB}=\sqrt{2}a$

$T\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-\sqrt{3}a\\ \sqrt{3}a+a\end{bmatrix}$，故 $B'(a-\sqrt{3}a,\sqrt{3}a+a)$，且

$\overline{OB'}^2=a^2(1-\sqrt{3})^2+a^2(\sqrt{3}+1)^2=8a^2\Rightarrow\overline{OB'}=2\sqrt{2}a=2\overline{OB}$。

② $\overrightarrow{OB}=(a,a)$，$\overrightarrow{OB'}=(a-\sqrt{3}a,\sqrt{3}a+a)$

$\Rightarrow\cos\angle BOB'=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB'}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OB'}|}=\dfrac{a^2(1-\sqrt{3})+a^2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}a\cdot2\sqrt{2}a}=\dfrac{2a^2}{4a^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle BOB'=60^\circ$。

〈解法二〉

由(2)可知 $T=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$

令 $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，為對原點伸縮 2 倍的矩陣，

$R=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$，為對原點逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$ 的矩陣

故 $T=DR$，為將正方形 $OABC$ 先逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$，得 $OA_1B_1C_1$，再對原點伸縮 2 倍，得 $OA'B'C'$，

故 $\overline{OB'}=2\overline{OB}$，且 $\angle BOB'=\angle BOB_1=60^\circ$。

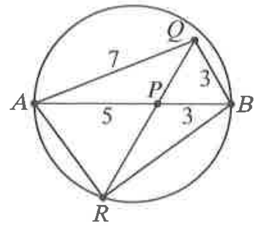
二、(1) $\frac{1}{2}$；(2) 3；(3) $\frac{1+\sqrt{61}}{2}$

難易度：難

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：能透過餘弦定理解決幾何問題

解析：依題意得右圖所示



(1)利用餘弦定理，$\cos\angle ABQ=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}=\dfrac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3}=\dfrac{1}{2}$。

(2)〈解法一〉

由(1)，利用餘弦定理，

$\overline{PQ}^2=\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2-2\times\overline{BP}\times\overline{BQ}\cos\angle ABQ=3^2+3^2-2\times3\times3\times\frac{1}{2}=9$，

得 $\overline{PQ}=3$。

〈解法二〉

$\because\cos\angle ABQ=\frac{1}{2}$ $\therefore\angle PBQ=60^\circ$

故 $\triangle BPQ$ 為一個邊長為 3 的正三角形，得 $\overline{PQ}=3$。

(3)由(2)可知 $\triangle BPQ$ 為正三角形，故 $\angle APR=\angle BPQ=60^\circ$

以及 $\angle BPR=180^\circ-\angle APR=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

〈解法一〉

設 $\overline{PR}=x$，利用餘弦定理，

$\overline{AR}^2=\overline{AP}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{PR}\cos60^\circ=5^2+x^2-2\times5\times x\times\frac{1}{2}=x^2-5x+25$

$\overline{BR}^2=\overline{BP}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{BP}\times\overline{PR}\cos120^\circ=3^2+x^2-2\times3\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)=x^2+3x+9$

得 $\overline{AR}^2+\overline{BR}^2=(x^2-5x+25)+(x^2+3x+9)=2x^2-2x+34$ ……………①

$\because R$ 在圓 C 上且 $\overline{AB}$ 為直徑 $\therefore\angle ARB=90^\circ$，由畢氏定理可得

$\overline{AR}^2+\overline{BR}^2=\overline{AB}^2=8^2$ ……………②

綜合①和②整理得 $x^2-x-15=0$，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$ (負不合)，故 $\overline{PR}=\frac{1+\sqrt{61}}{2}$。

〈解法二〉

設圓 C 的圓心為 O

在 $\triangle OPR$ 中，$\overline{OP}=\overline{OB}-\overline{BP}=4-3=1$，半徑 $\overline{OR}=4$、$\angle APR=\angle BPQ=60^\circ$

設 $\overline{PR}=x$，利用餘弦定理，

$\overline{OR}^2=\overline{OP}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{PR}\cos60^\circ$，即 $4^2=1^2+x^2-2\times1\times x\times\frac{1}{2}$

整理得 $x^2-x-15=0$，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$ (負不合)，故 $\overline{PR}=\frac{1+\sqrt{61}}{2}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1)略；(2) $\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$；(3)略

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：知道複數平面上複數的幾何意涵，並能依此連結至矩陣運算與線性變換

解析：(1) $(1+\sqrt{3}i)^n=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$(1 分)

$\Rightarrow a_n=2^n\cos\frac{n\pi}{3}$，$b_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$(2 分)

$$\Rightarrow a_n^2+b_n^2=2^{2n}\cos^2\frac{n\pi}{3}+2^{2n}\sin^2\frac{n\pi}{3}=2^{2n}\left(\cos^2\frac{n\pi}{3}+\sin^2\frac{n\pi}{3}\right)=2^{2n}\Rightarrow\sqrt{a_n^2+b_n^2}=2^n$$。(1 分)

(2)由 $(1+\sqrt{3}i)^{n+1}=(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^n$ 可得

$a_{n+1}+b_{n+1}i=(1+\sqrt{3}i)(a_n+b_ni)=(a_n-\sqrt{3}b_n)+(\sqrt{3}a_n+b_n)i$ (2 分)

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}=a_n-\sqrt{3}b_n\\ b_{n+1}=\sqrt{3}a_n+b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$$，故 $T=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}$。(2 分)

(3)〈解法一〉

①令 $A(a,0)$，$C(0,a)$，$B(a,a)$，$a>0$，知 $\overline{OB}=\sqrt{2}a$

$T\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-\sqrt{3}a\\ \sqrt{3}a+a\end{bmatrix}$，故 $B'(a-\sqrt{3}a,\sqrt{3}a+a)$，且

$\overline{OB'}^2=a^2(1-\sqrt{3})^2+a^2(\sqrt{3}+1)^2=8a^2\Rightarrow\overline{OB'}=2\sqrt{2}a=2\overline{OB}$。(2 分)

② $\overrightarrow{OB}=(a,a)$，$\overrightarrow{OB'}=(a-\sqrt{3}a,\sqrt{3}a+a)$

$$\Rightarrow\cos\angle BOB'=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB'}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OB'}|}=\frac{a^2(1-\sqrt{3})+a^2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}a\cdot2\sqrt{2}a}=\frac{2a^2}{4a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle BOB'=60^\circ$$。(2 分)

〈解法二〉

由(2)可知 $T=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\ 0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$ (2 分)

令 $D=\begin{bmatrix}2&0\\ 0&2\end{bmatrix}$，為對原點伸縮 2 倍的矩陣，

$R=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$，為對原點逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$ 的矩陣

故 $T=DR$，為將正方形 $OABC$ 先逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$，得 $OA_1B_1C_1$，再對原點伸縮 2 倍，得 $OA'B'C'$，

故 $\overline{OB'}=2\overline{OB}$，且 $\angle BOB'=\angle BOB_1=60^\circ$。(2 分)

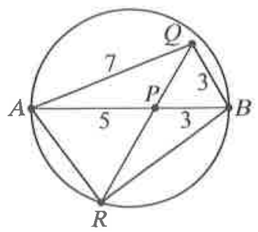
二、(1) $\frac{1}{2}$；(2) 3；(3) $\frac{1+\sqrt{61}}{2}$

難易度：難

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：能透過餘弦定理解決幾何問題

解析：依題意得右圖所示



(1)利用餘弦定理，$\cos\angle ABQ=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3}$ (3 分)

$=\frac{1}{2}$。(1 分)

(2)〈解法一〉

由(1)，利用餘弦定理，

$\overline{PQ}^2=\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2-2\times\overline{BP}\times\overline{BQ}\cos\angle ABQ=3^2+3^2-2\times3\times3\times\frac{1}{2}=9$，(2 分)

得 $\overline{PQ}=3$。(2 分)

〈解法二〉

$\because\cos\angle ABQ=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\angle PBQ=60^\circ$ (2 分)

故 $\triangle BPQ$ 為一個邊長為 3 的正三角形，得 $\overline{PQ}=3$。(2 分)

(3)由(2)可知 $\triangle BPQ$ 為正三角形，故 $\angle APR=\angle BPQ=60^\circ$

以及 $\angle BPR=180^\circ-\angle APR=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

〈解法一〉

設 $\overline{PR}=x$，利用餘弦定理，

$\overline{AR}^2=\overline{AP}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{PR}\cos60^\circ=5^2+x^2-2\times5\times x\times\frac{1}{2}=x^2-5x+25$ (1 分)

$\overline{BR}^2=\overline{BP}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{BP}\times\overline{PR}\cos120^\circ=3^2+x^2-2\times3\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)=x^2+3x+9$ (1 分)

得 $\overline{AR}^2+\overline{BR}^2=(x^2-5x+25)+(x^2+3x+9)=2x^2-2x+34$ ……………①

$\because R$ 在圓 C 上且 $\overline{AB}$ 為直徑 $\quad\therefore\angle ARB=90^\circ$，由畢氏定理可得

$\overline{AR}^2+\overline{BR}^2=\overline{AB}^2=8^2$ ……………②

綜合①和②整理得 $x^2-x-15=0$ (1 分)，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$(負不合)，故 $\overline{PR}=\frac{1+\sqrt{61}}{2}$。(1 分)

〈解法二〉

設圓 C 的圓心為 O

在 $\triangle OPR$ 中，$\overline{OP}=\overline{OB}-\overline{BP}=4-3=1$，半徑 $\overline{OR}=4$、$\angle APR=\angle BPQ=60^\circ$

設 $\overline{PR}=x$，利用餘弦定理，

$\overline{OR}^2=\overline{OP}^2+\overline{PR}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{PR}\cos60^\circ$，即 $4^2=1^2+x^2-2\times1\times x\times\frac{1}{2}$ (2 分)

整理得 $x^2-x-15=0$ (1 分)，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$(負不合)，故 $\overline{PR}=\frac{1+\sqrt{61}}{2}$。(1 分)