二、(1) 5；(2) 4；(3) -4；(4) $\frac{3\pi}{2}$

難易度：難

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：函數圖形、正餘弦疊合公式、週期

解析：(1) $y=f(x)$ 圖形通過點 $P(4\pi, 8)$

$\Rightarrow a\sin 8\pi+3\cos 8\pi+c=8$ (1 分)

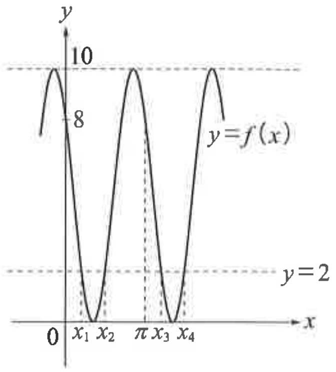
$\Rightarrow 3+c=8$

$\Rightarrow c=5$。(1 分)

(2)由疊合公式可得 $f(x)=a\sin 2x+3\cos 2x+c$

$=\sqrt{a^2+9}\sin(2x+\theta)+c$

可知 $y=f(x)$ 週期為 π，圖形如右



極小值 $-\sqrt{a^2+9}+5=0$ (1 分)

$\Rightarrow |a|=4$。(1 分)

(3)①當 $a=4$ 時，$f(x)=4\sin 2x+3\cos 2x+5$

$f(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 有極大值，不合 (2 分)

②當 $a=-4$ 時，$f(x)=-4\sin 2x+3\cos 2x+5$

$f(x)$ 在 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 有極小值，符合 (1 分)

所以 $a=-4$。(1 分)

(4)解 $-4\sin 2x+3\cos 2x+5=2$ (1 分)

$\Rightarrow (3\cos 2x)^2=(4\sin 2x-3)^2$

$\Rightarrow 9-9\sin^2 2x=16\sin^2 2x-24\sin x+9$

$\Rightarrow 25\sin^2 2x-24\sin 2x=0$

$\Rightarrow \sin 2x(25\sin 2x-24)=0$

$\Rightarrow \sin 2x=0$ 或 $\frac{24}{25}$ (1 分)

①當 $\sin 2x=\frac{24}{25}$，$\cos 2x=\frac{7}{25}$，比較圖形，可知解為 $x=x_1$，x_3，x_5，……，

②當 $\sin 2x=0$，$\cos 2x=-1$

$\Rightarrow 2x=(2n+1)\pi$

$\Rightarrow x=\frac{2n+1}{2}\pi$ (n 為整數)

比較圖形，可知 $x_2=\frac{\pi}{2}$，$x_4=\frac{3\pi}{2}$。(2 分)

臺北區 109 學年度第二學期

指定科目第二次模擬考試

數學甲參考答案暨詳解

99363415-29

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(3)	(4)	(3)	(2)(3)(5)	(1)(2)(5)	(2)(4)(5)	(2)(3)	(1)(5)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

難易度：易

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉、第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：利用直線參數式求得一般式，並求得極限

解析：已知 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{2}$，令 $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3+3t\\z=1+2t\end{cases}$，$t$ 為實數，代入平面 $2nx+3y+nz=8n$

可得 $2n(-1+2t)+3(-3+3t)+n(1+2t)=8n$

整理後得 $t=\dfrac{9n+9}{6n+9}$

所以 $x=a_n=-1+2\times\dfrac{9n+9}{6n+9}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+2\times\dfrac{9n+9}{6n+9}\right)=-1+2\times\dfrac{9}{6}=2$

故選(3)。

2. (4)

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：了解正弦定理的使用

解析：設四邊形 $ABCD$ 外接圓的半徑為 R，$\angle ACB=\theta$，則 $\angle CAD=90^\circ-\theta$

由正弦定理得 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}=2R\Rightarrow\dfrac{4}{\sin\theta}=2R$

$\Rightarrow R\sin\theta=2$…………①

同理，$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=2R\Rightarrow\dfrac{8}{\sin(90^\circ-\theta)}=2R$

$\Rightarrow R\cos\theta=4$…………………②

由①^2+②^2 得 $(R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2=2^2+4^2\Rightarrow R^2=20$

四邊形 $ABCD$ 外接圓的面積為 $\pi R^2=20\pi$

故選(4)。

3. (3)

難易度：中

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：了解複數平面的幾何意涵

解析：在複數平面所對應的坐標平面上，因為 $|z_1|=2$

所以 z_1 代表的點會在圓 $x^2+y^2=4$ 上

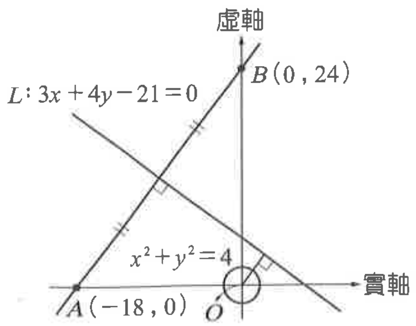
令 $A(-18,0)$、$B(0,24)$

因為 $|z_2+18|=|z_2-24i|$，所以 z_2 代表的點會在 $\overline{AB}$ 的中垂線 L：$3x+4y-21=0$ 上

$|z_1-z_2|\geq d(O,L)-r=\dfrac{21}{5}-2=2\dfrac{1}{5}$

所以 n 的最小整數值為 3

故選(3)。



二、多選題

4. (2)(3)(5)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：求方程式的解、判斷根的屬性

解析：因 $f(x)$ 為實係數多項式，且 $f(2+i)=0$ 由虛根成對定理得 $f(x)=0$ 有 $2+i$、$2-i$ 兩虛根

又 $f(x)<0$ 的解為 $x<2$，各區間正負如下：

$-$ $\quad 2 \quad$ $+$ $\quad 2\sqrt{3} \quad$ $+$ $\quad x$

得 $f(x)=a(x-(2+i))(x-(2-i))(x-2)(x-2\sqrt{3})^2$，$a$ 為實數

(1) ╳：應為 $2+i$、$2-i$、2、$2\sqrt{3}$ 皆為 $f(x)=0$ 的根

(2) ○：$f(x)=0$ 的實根僅 2、$2\sqrt{3}$ (重根)三個

(3) ○：因最右區間中，函數值為正，可知領導係數 $a>0$

(4) ╳：方程式 $f(x^2)=0\Rightarrow a(x^4-4x^2+5)(x^2-2)(x^2-2\sqrt{3})^2=0$

其中 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ 可知 $\sqrt{2}$ 必為 $f(x^2)=0$ 的一根

(5) ○：對於所有實數，$g(20-x)=f(x)$ 皆成立

則當 $x=3$ 時，$g(20-3)=f(3)\Rightarrow g(17)=f(3)$

因為 $2<3<2\sqrt{3}$，故 $g(17)=f(3)>0$

故選(2)(3)(5)。

5. (1)(2)(5)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：應用對數律進行運算

解析：(1) ○：$M=0+5\log\dfrac{32}{26}>0$

(2) ○：$0=0+5\log\dfrac{32}{d_\alpha}\Rightarrow\log\dfrac{32}{d_\alpha}=0\Rightarrow\dfrac{32}{d_\alpha}=1\Rightarrow d_\alpha=32$

(3) ╳：$0=m_\beta+5\log\dfrac{32}{d_\beta}\Rightarrow m_\beta=-5\log\dfrac{32}{d_\beta}$

又 $d_\beta<d_\alpha=32\Rightarrow\dfrac{32}{d_\beta}>1\Rightarrow\log\dfrac{32}{d_\beta}>0$

所以 $m_\beta=-5\log\dfrac{32}{d_\beta}<0$

(4) ╳：$M=m_1+5\log\dfrac{32}{d_1}=m_2+5\log\dfrac{32}{d_2}$

$\Rightarrow m_1-m_2=5\log\dfrac{32}{d_2}-5\log\dfrac{32}{d_1}$

$\Rightarrow k=5\left[\log\dfrac{32}{d_2}-\log\dfrac{32}{d_1}\right]$

$\Rightarrow 5\log\dfrac{d_1}{d_2}=k$

$\Rightarrow\log\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{k}{5}$

$\Rightarrow\dfrac{d_1}{d_2}=10^{\frac{k}{5}}$

(5) ○：設某星的絕對星等為 M_t，視星等為 m_t

當距離 d 為定值，則 $M_t=m_t+5\log\dfrac{32}{d}\Rightarrow M_t-m_t=5\log\dfrac{32}{d}$ 為定值

故選(1)(2)(5)。

6. (2)(4)(5)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：貝氏定理、獨立事件、期望值、機率的估算

解析：

境內(人數期望值)	檢測結果為陽性	檢測結果為陰性	合計
真的感染 C 病毒	792	8	800
沒有感染 C 病毒	9992	989208	999200
合計	10784	989216	1000000

(1)╳：根據上表，檢測結果為陽性的人數期望值為 10784 人

(2)○：根據上表，偽陽性人數期望值為 9992 人

(3)╳：根據上表，若境內人士被檢測為陽性，則他真的罹患該傳染病的機率為 $\frac{792}{10784}<10\ \%$

境外(機率)	至少一次為陽性	兩次皆為陰性	合計
真的感染 C 病毒	0.0059994	$0.006\times0.01\times0.01=0.0000006$	0.006
沒有感染 C 病毒	0.0197806	$0.994\times0.99\times0.99=0.9742194$	0.994
合計	0.0257800	0.9742200	1.000

(4)○：若一境外人士感染 C 病毒，則他入境時所做的兩次篩檢皆為陰性的機率為 $0.01\times0.01=0.01\ \%$，所以兩次篩檢中至少有一次是陽性的機率 $1-0.01\ \%=99.99\ \%$，超過 $99.9\ \%$

(5)○：若一境外人士要入境，他所做的兩次篩檢都是陰性，則他其實感染了 C 病毒的機率為

$$\frac{0.006\times0.01\times0.01}{0.006\times0.01\times0.01+0.994\times0.99\times0.99}<\frac{0.006\times0.01\times0.01}{0.994\times0.99\times0.99}$$

$$\approx\frac{6}{1000}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}<\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{1000000}<\frac{1}{100000}$$

故選(2)(4)(5)。

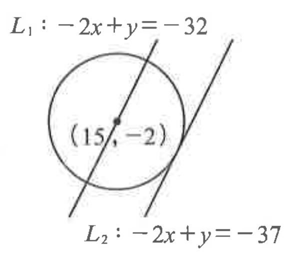
7. (2)(3)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：判斷圓與直線的關係

解析：$(x-15)^2+(y+2)^2\leq5$ 的圖形為一圓及其內部



圓心為 $(15,-2)$，圓半徑為 $\sqrt{5}$、面積為 5π

而 $-2x+y\leq k$ 的圖形為直線 $-2x+y=k$ 的右側

又 A 的範圍為 $0\leq A\leq\frac{5\pi}{2}$

當 $A=\frac{5\pi}{2}$ 時，直線 $-2x+y=k$ 過圓心 $(15,-2)$

此時直線為右圖中 L_1：$-2x+y=-32$

當直線 $-2x+y=k$ 與圓相切時

圓心 $(15,-2)$ 與直線的距離為半徑 $\sqrt{5}\Rightarrow\frac{|-2\times15+1\times(-2)-k|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow k=-27$ 或 -37

當 $k<-32$ 時圓的切線為右圖中 L_2：$-2x+y=-37$

此時 $\begin{cases}(x-15)^2+(y+2)^2\leq5\\-2x+y\leq-37\end{cases}$ 的解圖形面積為 0

所以符合範圍 $0<A\leq\frac{5\pi}{2}$ 的 k 值為 $-37<k\leq-32$

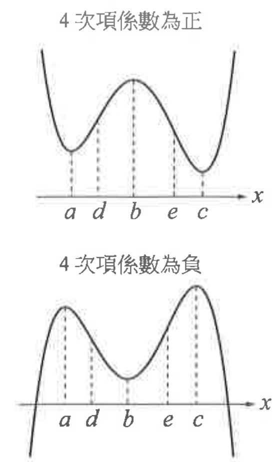
故選(2)(3)。

8. (1)(5)

難易度：難

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：導數、二階導數與函數圖形的關係



解析：$f'(x)$ 為三次多項式，$f'(x)=0$ 有三個相異實根

$\Rightarrow x=a$，b，c 處有極值

$f''(x)$ 為二次多項式，$f''(x)=0$ 有兩個相異實根

$\Rightarrow x=d$，e 處有反曲點，$y=f(x)$ 的圖形有兩種，如右示意圖

(1)○：必定會 $a<d<b<e<c$

(2)╳：只有在 $b-a=c-b$ 時，圖形才會對稱於直線 $x=b$

(3)╳：當 4 次項係數為負時，$y=f(x)$ 的圖形在 d 與 b 之間凹口向上

(4)╳：當 $m\neq0$ 時，有可能有四個交點

(5)○：多項式 $y=f(x)$ 圖形的反曲點是 $y=f'(x)$ 圖形的極值點

故選(1)(5)。

三、選填題

A. 14

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：了解矩陣列運算意義

解析：$\begin{bmatrix}2&3&a&c\\4&5&b&d\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{bmatrix}2&3&a&c\\0&-1&b-2a&d-2c\end{bmatrix}\times3$

$\to\begin{bmatrix}2&0&-5a+3b&-5c+3d\\0&-1&b-2a&d-2c\end{bmatrix}\begin{matrix}\times\frac{1}{2}\\\times(-1)\end{matrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{-5a+3b}{2}&\frac{-5c+3d}{2}\\0&1&2a-b&2c-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&5&4\\0&1&3&2\end{bmatrix}$

可得 $\begin{cases}\frac{-5a+3b}{2}=5\\2a-b=3\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{-5c+3d}{2}=4\\2c-d=2\end{cases}$

解聯立得知 $a=19$，$b=35$，$c=14$，$d=26$

故 $a+b-c-d=14$。

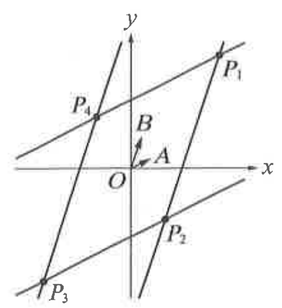
B. $2\sqrt{13}$

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：使用行列式值計算面積

解析：設 $P(x,y)$



$\triangle OAP=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x&y\\2&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x-2y|=8$

$\Rightarrow x-2y=\pm16$

$\triangle OBP=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x&y\\1&3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3x-y|=9$

$\Rightarrow 3x-y=\pm18$

解聯立方程式 $\begin{cases}x-2y=\pm16\\3x-y=\pm18\end{cases}$ 得：

P 點可為 $\pm\left(\frac{52}{5},\frac{66}{5}\right)$ 或 $\pm(-4,6)$，如右圖中 P_1，P_2，P_3，P_4

故當 P 點為 $\pm(-4,6)$ 時，$|\overrightarrow{OP}|$ 有最小值為 $2\sqrt{13}$。

C. -18

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：空間坐標、向量、測量

解析：令天龍塔頂 $C(0,40,40)$，地虎塔頂 $D(0,-40,20)$

$\angle CPD=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DP}=0 \Rightarrow (x,y-40,-40)\cdot(x,y+40,-20)=0$

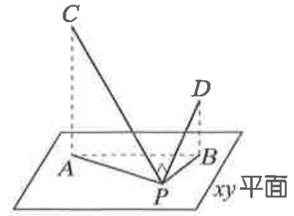
$\Rightarrow x^2+y^2-800=0$ ……………………①

看兩塔頂的仰角相同且塔高 $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1 \Rightarrow \overline{PA}:\overline{PB}=2:1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-40)^2}=2\sqrt{x^2+(y+40)^2}$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2+400y+4800=0$ ……………②

由①x3−②得 $y=-18$。



第貳部分：非選擇題

一、(1)略；(2)略；(3) $(a,b)=(-50,625)$，$L=100$；(4) $\frac{10000}{3}$

難易度：中

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：多項式函數極限的性質、多項式的積分

解析：(1) $f(5)=\lim_{x\to5}f(x)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot(x-5)^2=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot\lim_{x\to5}(x-5)^2=L\cdot0=0$。

(2)因為 $f(5)=0$，所以可假設 $f(x)=(x-5)Q(x)$，其中 $Q(x)$ 也是實係數多項式

於是 $f'(x)=Q(x)+(x-5)Q'(x)$

$f'(5)=Q(5)+0\cdot Q'(5)=Q(5)=\lim_{x\to5}Q(x)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{x-5}$

$=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot(x-5)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot\lim_{x\to5}(x-5)=L\cdot0=0$。

(3) $f(x)=x^4+ax^2+b \Rightarrow f'(x)=4x^3+2ax$

由(1)與(2)可知 $\begin{cases}f(5)=0\\f'(5)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}625+25a+b=0\\500+10a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-50\\b=625\end{cases}$

所以 $f(x)=x^4-50x^2+625=(x^2-25)^2=(x-5)^2(x+5)^2$

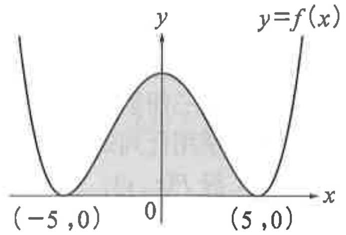
$L=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}=\lim_{x\to5}(x+5)^2=100$。

(4) $y=f(x)=x^4-50x^2+625=(x^2-25)^2=(x-5)^2(x+5)^2$，略圖如右

所求面積為 $\int_{-5}^{5}f(x)dx$

$=\int_{-5}^{5}(x^4-50x^2+625)dx$

$=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{50}{3}x^3+625x\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{10000}{3}$。



二、(1) 5；(2) 4；(3) -4；(4) $\frac{3\pi}{2}$

難易度：難

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：函數圖形、正餘弦疊合公式、週期

解析：(1) $y=f(x)$ 圖形通過點 $P(4\pi,8)$

$\Rightarrow a\sin8\pi+3\cos8\pi+c=8$

$\Rightarrow 3+c=8$

$\Rightarrow c=5$。

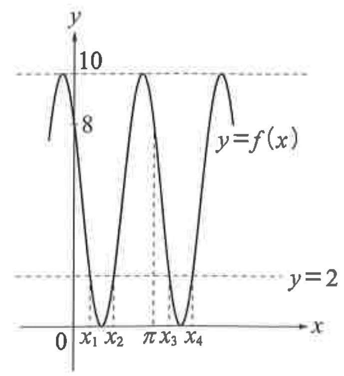
(2)由疊合公式可得 $f(x)=a\sin2x+3\cos2x+c$

$=\sqrt{a^2+9}\sin(2x+\theta)+c$

可知 $y=f(x)$ 週期為 π，圖形如右

極小值 $-\sqrt{a^2+9}+5=0$

$\Rightarrow |a|=4$。



(3)①當 $a=4$ 時，$f(x)=4\sin2x+3\cos2x+5$

$f(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 有極大值，不合

②當 $a=-4$ 時，$f(x)=-4\sin2x+3\cos2x+5$

$f(x)$ 在 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 有極小值，符合

所以 $a=-4$。

(4)解 $-4\sin2x+3\cos2x+5=2$

$\Rightarrow (3\cos2x)^2=(4\sin2x-3)^2$

$\Rightarrow 9-9\sin^2 2x=16\sin^2 2x-24\sin x+9$

$\Rightarrow 25\sin^2 2x-24\sin2x=0$

$\Rightarrow \sin2x(25\sin2x-24)=0$

$\Rightarrow \sin2x=0$ 或 $\frac{24}{25}$

①當 $\sin2x=\frac{24}{25}$，$\cos2x=\frac{7}{25}$，比較圖形，可知解為 $x=x_1$，x_3，x_5，……，

②當 $\sin2x=0$，$\cos2x=-1$

$\Rightarrow 2x=(2n+1)\pi$

$\Rightarrow x=\frac{2n+1}{2}\pi$ (n 為整數)

比較圖形，可知 $x_2=\frac{\pi}{2}$，$x_4=\frac{3\pi}{2}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1)略；(2)略；(3) $(a,b)=(-50,625)$，$L=100$；(4) $\frac{10000}{3}$

難易度：中

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：多項式函數極限的性質、多項式的積分

解析：(1) $f(5)=\lim_{x\to5}f(x)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot(x-5)^2=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot\lim_{x\to5}(x-5)^2=L\cdot0=0$。(2 分)

(2)因為 $f(5)=0$，所以可假設 $f(x)=(x-5)Q(x)$，其中 $Q(x)$ 也是實係數多項式

於是 $f'(x)=Q(x)+(x-5)Q'(x)$ (1 分)

$f'(5)=Q(5)+0\cdot Q'(5)=Q(5)=\lim_{x\to5}Q(x)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{x-5}$

$=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot(x-5)=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}\cdot\lim_{x\to5}(x-5)=L\cdot0=0$。(1 分)

(3) $f(x)=x^4+ax^2+b \Rightarrow f'(x)=4x^3+2ax$

由(1)與(2)可知 $\begin{cases}f(5)=0\\f'(5)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}625+25a+b=0\\500+10a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-50\\b=625\end{cases}$ (a，b 各 1 分)

所以 $f(x)=x^4-50x^2+625=(x^2-25)^2=(x-5)^2(x+5)^2$

$L=\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{(x-5)^2}=\lim_{x\to5}(x+5)^2=100$。(2 分)

(4) $y=f(x)=x^4-50x^2+625=(x^2-25)^2=(x-5)^2(x+5)^2$，略圖如右

所求面積為 $\int_{-5}^{5}f(x)dx$ (1 分)

$=\int_{-5}^{5}(x^4-50x^2+625)dx$ (1 分)

$=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{50}{3}x^3+625x\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{10000}{3}$。(2 分)