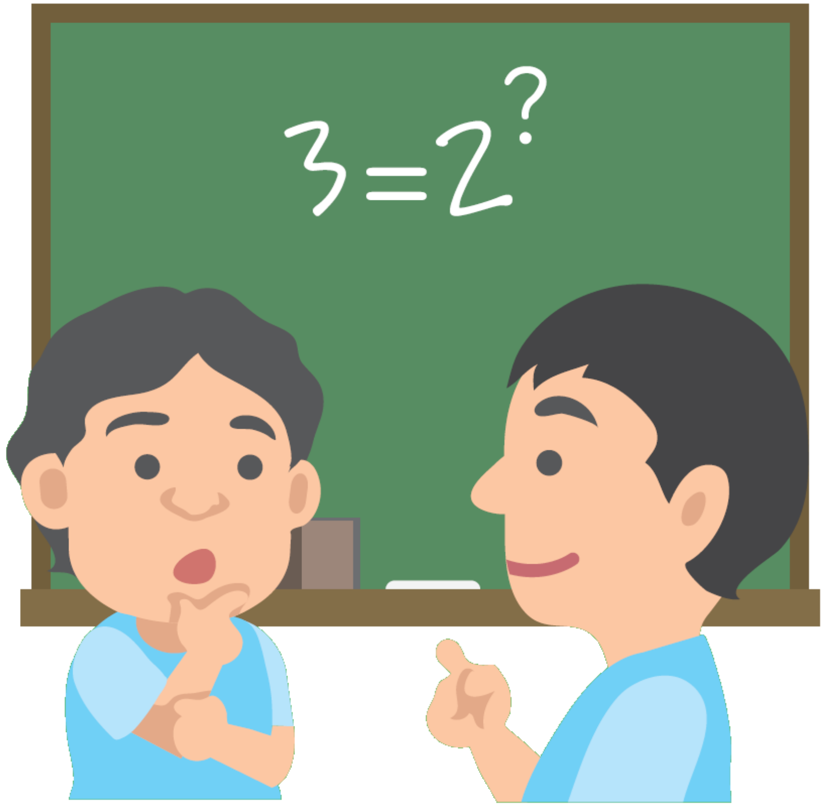
單元一　對數與對數律

GOOGLE

課程代碼：4mof53y

meet：ZSRE2MAT

對數與對數律



在指數的運算中，

我們知道 $2^1=2$，$2^2=4$，

那麼2的幾次方會等於3呢？

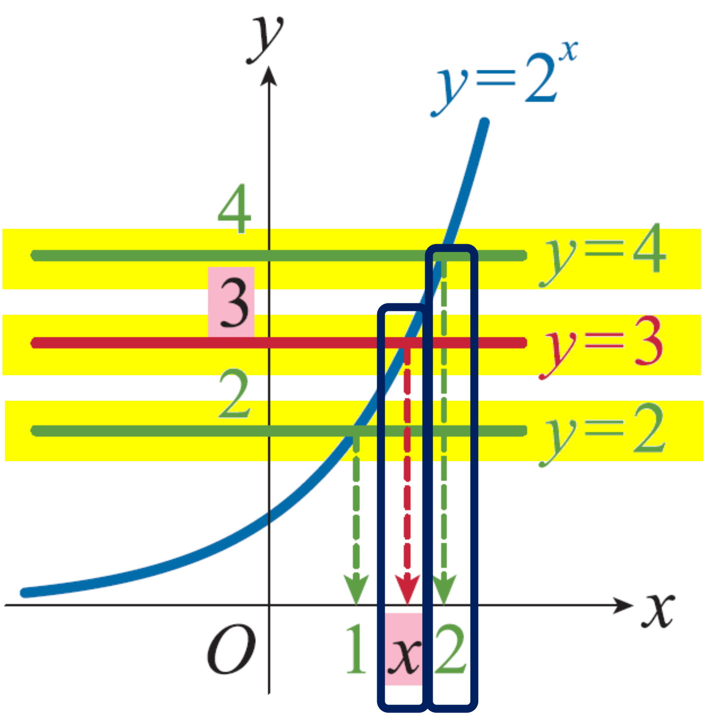
本單元中將定義一個與指數相對應的概念—「對數」，

並討論對數的各種運算性質。

甲、對數

解指數方程式$2^x=4$時，利用$2^2=4$，可以得到答案$x=2$。
但是對於方程式$2^x=3$，是不是有實數解呢？
若是，又該如何表示呢？

前一單元提到，指數函數$y=2^x$的圖形與水平線$y=4$的圖形有唯一交點，如圖所示，方程式$2^x=4$的解就是此交點的x坐標2。
而指數函數$y=2^x$的圖形與水平線的圖形也有唯一交點，因此可知：
方程式$2^x=3$也有唯一解，此實數解就是$y=2^x$與$y=3$圖形交點的x坐標，我們將這個x用符號$\boxed{\log_2 3}$來表示。



其中 2 稱為 $\log_2 3$ 的**底數**，3 稱為 $\log_2 3$ 的**真數**。

第一冊學過的常用對數 $\log b$ 就是底數為10的情形，

即 $\log_{10} b$ 可以簡記為 $\log b$。

事實上，常用對數 $\log_{10} b$ 的定義

「設 $b > 0$，當實數 x 滿足 $b = 10^x$ 時，

指數 x 的值以符號 $\log_{10} b$ 表示。」

與上述 $\log_2 3$ 的定義

「當實數 x 滿足方程式 $3 = 2^x$ 時，

此實數解 x 的值以符號 $\log_2 3$ 表示。」

一般而言，當 $a>0$，$a\neq 1$ 時，指數函數 $y=a^x$ 的圖形與 x 軸上方的水平線 $y=b$（即 $b>0$）都有唯一交點，也就是說，方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解；我們將此實數解 x 以符號 $\log_a b$ 來表示。

對數的定義

設 $a>0$，$a\neq 1$，且 $b>0$ 時，

$\log_a b$

b ← 真數

a ← 底數

方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解 $x=\log_a b$。

$\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時 b 的對數」，

其中 a 稱為底數，b 稱為真數。

例題

1. 求下列各對數的值：

(1) $\log_2 8$ **(2)** $\log_3 \frac{1}{9}$ **(3)** $\log_4 1$ **(4)** $\log_5 5\sqrt{5}$

解：

(1) 因為 $8=2^3$，所以 $\log_2 8=3$

(2) 因為 $\frac{1}{9}=3^{-2}$，所以 $\log_3 \frac{1}{9}=-2$

(3) 因為 $1=4^0$，所以 $\log_4 1=0$

(4) 因為 $5\sqrt{5}=5\times 5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{2}}$，所以 $\log_5 5\sqrt{5}=\frac{3}{2}$

隨堂

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 16$ **(2)** $\log_5 \dfrac{1}{5}$ **(3)** $\log_6 6$ **(4)** $\log_7 49\sqrt{7}$

解：

(1) 因為 $16 = 2^4$，所以 $\log_2 16 = 4$

(2) 因為 $\dfrac{1}{5} = 5^{-1}$，所以 $\log_5 \dfrac{1}{5} = -1$

(3) 因為 $6 = 6^1$，所以 $\log_6 6 = 1$

(4) 因為 $49\sqrt{7} = 7^{\frac{5}{2}}$，所以 $\log_7 49\sqrt{7} = \dfrac{5}{2}$

例題

2. 已知 $x=\log_2 3$，求 4^x 及 2^{-x} 的值。

解：根據對數的定義，
當$x=\log_a b$ 時，我們有 $a^x=b$。

因為 $x=\log_2 3$，所以$2^x=3$。

故

$$4^x=\left(2^x\right)^2=3^2=9$$

$$2^{-x}=\left(2^x\right)^{-1}=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

隨堂

2. 已知 $x=\log_3 5$，求 3^x 及 3^{2x} 的值。

解：因為 $x=\log_3 5$，所以 $3^x=5$。

且 $3^{2x}=\left(3^x\right)^2=5^2=25$

根據定義，因為 $\log_a b$ 是方程式 $a^x = b$ 的解，所以

$$a^{\log_a b} = b$$

例如：

$$3^{\log_3 5} = 5 \text{ ， } 10^{\log 7} = 7$$

因此，任何指數函數皆可改寫成以10為底數的指數函數，例如：

$$y = 7^x = \left(10^{\log 7}\right)^x = 10^{(\log 7)x}$$

前一個單元介紹過常數 $e=2.71828\cdots$，當對數以 e 為底數（即 $\log_e b$）時，稱它為自然對數，常記作 $\ln b$。

自然對數 $\ln b$ 與常用對數 $\log b$ 是不同底數的兩種對數，其值也會有差異

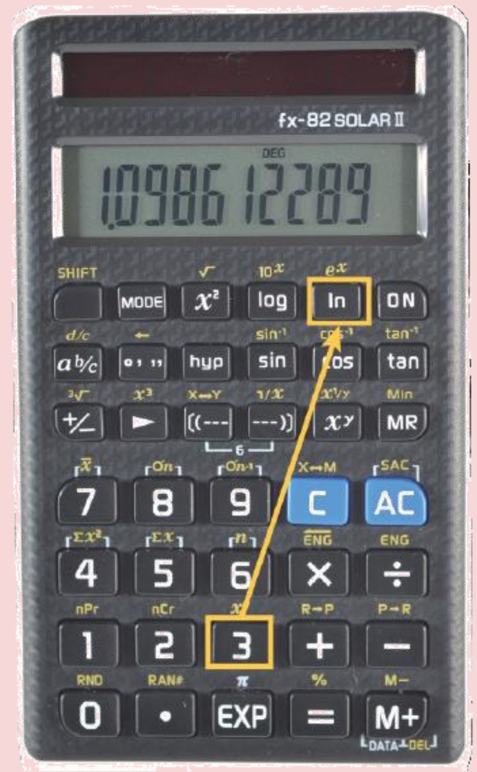
例如：

常用對數

$$\log 3=\log_{10}3\approx 0.4771$$

自然對數

$$\ln 3=\log_e 3\approx 1.099$$



乙、對數律與換底公式

納皮爾曾說過：「我終於發現某些優秀又簡短的規則，可以讓運算更有效益，並把困難繁瑣的乘除運算簡化成加減運算。」
納皮爾所說的規則，就是接下來要介紹的對數律。

約翰．納皮爾（John Napier,1550~1617）
對數的發明者，
使得科學界許多繁複的計算可以簡化。

對數是由指數來定義的，而指數滿足指數律，所以對數也有一些相對應好用的運算性質。使用指數律時，計算底數相同的兩數相乘，只要將兩數的次方相加即可。先來看一個例子：

$$10^2 \times 10^3 = 10^{\boxed{2+3}} = 10^{\boxed{5}}$$

也就是說，當底數相同的兩數進行乘法運算時，它們的次方（也就是對數）實際上是在做加法運算。接著，利用對數的定義，得

$$\boxed{\log 100 + \log 1000} = 2 + 3 = 5 = \log 10^5 = \boxed{\log 100000}$$

最後，整理可得

$$\boxed{\log(100 \times 1000)} = \boxed{\log 100 + \log 1000}$$

以上的結果並非偶然，一般而言，我們有以下對數律。

常用對數的對數律

設 r，s 皆為正數，則

(1) $\log rs = \log r + \log s$

(2) $\log \dfrac{r}{s} = \log r - \log s$

(3) $\log r^{t} = t\log r$ (t 是實數)

證明：設 $x = \log r$ **且** $y = \log s$，**即** $10^{x} = r$ **且** $10^{y} = s$。

(1)因為 $rs = 10^{x} \times 10^{y} = 10^{x+y}$（指數律），

所以由對數的定義得 $\log rs = x + y = \log r + \log s$。

常用對數的對數律

設 r，s 皆為正數，則

(1) $\log rs = \log r + \log s$

(2) $\log \dfrac{r}{s} = \log r - \log s$

(3) $\log r^t = t \log r$ (t 是實數)

證明： 設 $x = \log r$ 且 $y = \log s$，即 $10^x = r$ 且 $10^y = s$。

(2)因為 $\dfrac{r}{s} = \dfrac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}$（指數律），

所以由對數的定義得 $\log \dfrac{r}{s} = x - y = \log r - \log s$。

常用對數的對數律

設 r，s 皆為正數，則

(1) $\log rs = \log r + \log s$

(2) $\log \dfrac{r}{s} = \log r - \log s$

(3) $\log r^{t} = t \log r$ (t 是實數)

證明：設 $x = \log r$ 且 $y = \log s$，即 $10^{x} = r$ 且 $10^{y} = s$。

(3)因為 $r^{t} = \left(10^{x}\right)^{t} = 10^{tx}$（指數律），

所以由對數的定義得 $\log r^{t} = tx = t \log r$。

例題

3. 求下列各式的值：

(1) $\log 4+\log 25$。

(2) $\log\frac{1}{6}-\log\frac{125}{42}-\log 56$ 。

解：(1) $\log 4+\log 25=\log(4\times 25)=\log 100=2$

(2) $\log\frac{1}{6}-\log\frac{125}{42}-\log 56$

$$=\log\left(\frac{1}{6}\div\frac{125}{42}\div 56\right)=\log\left(\frac{1}{6}\times\frac{42}{125}\times\frac{1}{56}\right)$$

$$=\log\frac{1}{1000}=-3$$

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log 2+\log 0.2+\log 5+\log 0.5$ 。

(2) $\log 2-\log 20$ 。

解：(1) $\log 2+\log 0.2+\log 5+\log 0.5$

$=\log(2\times 0.2\times 5\times 0.5)$

$=\log 1$

$=0$

(2) $\log 2-\log 20=\log(2\div 20)=\log\dfrac{1}{10}=-1$

例題

4. 求 $3\log 2+\log 5-2\log 20$ 的值。

解：

$$3\log 2+\log 5-2\log 20$$

$$=\log 2^3+\log 5-\log 20^2$$

$$=\log\frac{8\times 5}{400}$$

$$=\log\frac{1}{10}$$

$$=-1$$

隨堂

求 $2\log\frac{5}{3}+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$ 的值。

解：

$$2\log\frac{5}{3}+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$$

$$=\log\left(\frac{5}{3}\right)^2+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$$

$$=\log\left(\frac{25\times27\times14}{9\times35\times3}\right)$$

$$=\log10$$

$$=1$$

計算機上我們很容易按出 $\log 2$ 和 $\log 3$ 的值，那麼要如何得出 $\log_2 3$ 的值呢？

它跟 $\log 2$ 和 $\log 3$ 又有什麼關係呢？

這就是底下要介紹的換底公式。

換底公式

設 a,b 均為正整數，且 $a\neq 1$，則

$$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}$$

證明：設 $x=\log a$ 且 $y=\log b$，即 $a=10^x$ 且 $b=10^y$。

因為 $b=10^y=\left(10^x\right)^{\frac{y}{x}}=a^{\frac{y}{x}}$，所以 $\log_a b=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\log b}{\log a}$

根據換底公式，就可以知道我們要算的 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}$

一般而言，其他底數的對數都可換成常用對數後再來求值

例題

5. 求下列各式的值：

(1) $\log_4 5\times\log_5 4$。 (2) $\log_8 \sqrt{2}$。

解：

(1) $\log_4 5\times\log_5 4=\dfrac{\log 5}{\log 4}\times\dfrac{\log 4}{\log 5}=1$

(2) $\log_8 \sqrt{2}=\dfrac{\log\sqrt{2}}{\log 8}=\dfrac{\log 2^{\frac{1}{2}}}{\log 2^3}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\log 2}{3\times\log 2}=\dfrac{1}{6}$

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 9$　(2) $\log_{25} \frac{1}{5}$

解：

(1) $\log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 9 = \frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 7}{\log 5} \times \frac{\log 9}{\log 7}$

$= \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{2 \times \log 3}{\log 3} = 2$

(2) $\log_{25} \frac{1}{5} = \frac{\log \frac{1}{5}}{\log 25} = \frac{\log 5^{-1}}{\log 5^2} = \frac{(-1) \times \log 5}{2 \times \log 5} = \frac{-1}{2}$

例題

6. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{\log_2 6}+\dfrac{1}{\log_3 6}$　　(2) $(\log_2 3)\times(\log_3 4+\log_9 2)$

解：

(1) $\dfrac{1}{\log_2 6}+\dfrac{1}{\log_3 6}=\dfrac{1}{\dfrac{\log 6}{\log 2}}+\dfrac{1}{\dfrac{\log 6}{\log 3}}$

$=\dfrac{\log 2}{\log 6}+\dfrac{\log 3}{\log 6}$

$=\dfrac{\log 6}{\log 6}=1$

例題

6. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{\log_2 6}+\dfrac{1}{\log_3 6}$　　(2) $(\log_2 3)\times(\log_3 4+\log_9 2)$

解：

(2) $(\log_2 3)\times(\log_3 4+\log_9 2)=\left(\dfrac{\log 3}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{\log 4}{\log 3}+\dfrac{\log 2}{\log 9}\right)$

$=\left(\dfrac{\log 3}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{2\times\log 2}{\log 3}+\dfrac{\log 2}{2\times\log 3}\right)$

$=\left(\dfrac{\log 3}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\log 2}{\log 3}\right)=\dfrac{5}{2}$

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log_2 24 - \log_4 9$　　(2) $(\log_2 5) \times (\log_5 8 + \log_{25} 16)$

解：

(1) $\log_2 24 - \log_4 9 = \dfrac{\log 24}{\log 2} - \dfrac{\log 9}{\log 4}$

$= \dfrac{\log 24}{\log 2} - \dfrac{2 \times \log 3}{2 \times \log 2}$

$= \dfrac{\log 24 - \log 3}{\log 2}$

$= \dfrac{\log 8}{\log 2} = 3$

隨堂

求下列各式的值：

(1) $\log_2 24-\log_4 9$　　(2) $(\log_2 5)\times(\log_5 8+\log_{25} 16)$

解：

(2) $(\log_2 5)\times(\log_5 8+\log_{25} 16)=\left(\dfrac{\log 5}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{\log 8}{\log 5}+\dfrac{\log 16}{\log 25}\right)$

$=\left(\dfrac{\log 5}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{3\times\log 2}{\log 5}+\dfrac{4\times\log 2}{2\times\log 5}\right)$

$=\left(\dfrac{\log 5}{\log 2}\right)\times\left(\dfrac{5\times\log 2}{\log 5}\right)=5$

例題

7. 解方程式 $2^x=3$。（四捨五入到小數點以下第4位）

解：

根據對數的定義，方程式 $2^x=3$ 的解為 $\log_2 3$。

利用換底公式可得 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}$，

使用計算機依序按下 3 log ÷ 2 log =

可得 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}\approx 1.5850$。

隨堂

7. 解方程式 $3^x=7$。（四捨五入到小數點以下第4位）

解：

根據對數的定義，方程式 $3^x=7$ 的解為 $\log_3 7$。

利用換底公式可得 $\log_3 7=\dfrac{\log 7}{\log 3}$，

使用計算機依序按下 7 log ÷ 3 log =

可得 $\log_3 7=\dfrac{\log 7}{\log 3}\approx 1.7712$。

例題

8. 海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其強度規模的等級 I 與該海嘯的平均海浪高度 H (公尺) 有著以下的關係式：$I=\dfrac{1}{2}+\log_2 H$

問：海嘯等級4的平均海浪高度為等級3的幾倍?

解：

令海嘯等級3與4的平均浪高分別為 α 與 β。由題意得：

$3=\dfrac{1}{2}+\log_2\alpha$ ①　　由①可得 $\log_2\alpha=\dfrac{5}{2}$，即 $\alpha=2^{\frac{5}{2}}$

$4=\dfrac{1}{2}+\log_2\beta$ ②　　由②可得 $\log_2\beta=\dfrac{7}{2}$，即 $\beta=2^{\frac{7}{2}}$

例題

8. 海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其強度規模的等級 I 與該海嘯的平均海浪高度 H (公尺) 有著以下的關係式：$I=\frac{1}{2}+\log_2 H$

問：海嘯等級4的平均海浪高度為等級3的幾倍?

解：

因此 $\frac{\beta}{\alpha}=2^{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}=2$

故海嘯等級4的平均浪高為等級3的2倍。

隨堂

承例題，已知當海嘯等級2時，人會被海浪沖走，求此時的平均海浪高度（公尺）。
（四捨五入到小數點以下第一位）

關係式：$I=\dfrac{1}{2}+\log_2 H$

解：

由題意可知 $2=\dfrac{1}{2}+\log_2 H$

移項可得 $\dfrac{3}{2}=\log_2 H$

解得 $H=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\approx 2.8$

故海嘯等級 2 時，平均海浪高度為 2.8 公尺。

丙、常用對數與科學記號

第一冊曾使用科學記號來判斷一個很大的數是幾位數，例如：

$$5.12\times10^{\boxed{5}}\text{ 是}\boxed{\text{6位數}}$$

接著，我們進一步來探討任意正數的乘冪，先看一個大於 1 的例子：利用計算機的 x^y 鍵可得

$$2^{50}\approx\boxed{1}.1\times10^{\boxed{15}}$$

由上式可知 2^{50} 是$\boxed{\text{最高位數字為 1}}$的$\boxed{\text{16位數}}$。

此外，將一個介於 0 到 1 之間的數字表為科學記號，亦可知道它在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字，例如：

$$0.00543=\boxed{5}.43\times10^{\boxed{-3}}$$

從小數點後第 3 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 $\boxed{5}$。

再來看一個例子：利用計算機的 x^y 鍵可得

$$0.3^{100}\approx\boxed{5}.2\times10^{\boxed{-53}}$$

由上式可知將 0.3^{100} 表示小數時，

從小數點後第53位開始出現不為 0 的數字，此數字為 $\boxed{5}$。

以上的例子都是利用計算機中的 x^y 鍵得到答案，

但因為計算機的位數有限，

所以當數字太大或太小就會超過計算機的範圍而無法計算

此時，可透過常用對數與指數律，

先將它化為 10 的冪次後再表為科學記號來求得其位數，

我們先以 2^{50} 說明驗證，再來看計算機按不出來的例子。

例題

9. 回答以下各小題：

(1) 2^{50} 是幾位數？　(2) $3^{200}\times 7^{1000}$ 是幾位數？

(3) 將 0.5^{500} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？

解：

(1) 因為 $2^{50}=\left(10^{\log 2}\right)^{50}=10^{50\log 2}\approx 10^{15.05}$

$=10^{0.05}\times 10^{15}\approx \boxed{1}.1\times 10^{\boxed{15}}$

所以 2^{50} 是最高位數字為 1 的 16 位數。

可看出此結果與之前直接利用計算機求得的位數是相同的。

例題

9. 回答以下各小題：

(1) 2^{50} 是幾位數？　(2) $3^{200}\times 7^{1000}$ 是幾位數？

(3) 將 0.5^{500} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？

解：

(2) 因為 $3^{200}\times 7^{1000}=\left(10^{\log 3}\right)^{200}\times\left(10^{\log 7}\right)^{1000}$

$$=10^{200\log 3+1000\log 7}$$

$$\approx 10^{940.52}$$

$$=10^{0.52}\times 10^{940}$$

$$\approx \boxed{3}.3\times 10^{\boxed{940}}$$

所以 $3^{200}\times 7^{1000}$ 是最高位數字為 3 的 941 位數。

例題

9. 回答以下各小題：

(1) 2^{50} 是幾位數？　(2) $3^{200}\times 7^{1000}$ 是幾位數？

(3) 將 0.5^{500} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？

解：

(3) 因為 $0.5^{500}=2^{-500}=\left(10^{\log 2}\right)^{-500}=10^{-500\log 2}$

$$\approx 10^{-150.51}$$

$$=10^{0.49}\times 10^{-151}$$

$$\approx \boxed{3}.1\times 10^{\boxed{-151}}$$

由上式可知將 0.5^{500} 表示小數時，

從小數點後第151位開始出現不為 0 的數字，此數字為 3。

隨堂

回答以下各小題：

(1) $4^{40}\times 3^{100}$ 是幾位數？最高位數字為何？

(2) 將 0.4^{100} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？此不為0的數字為何？

解：

(1) 因為 $4^{40}\times 3^{100}=\left(10^{\log 4}\right)^{40}\times\left(10^{\log 3}\right)^{100}$

$=10^{40\log 4+100\log 3}$

$\approx 10^{71.79}$

$=10^{0.79}\times 10^{71}$

$\approx \boxed{6}.1\times 10^{\boxed{71}}$

所以 $4^{40}\times 3^{100}$ 是最高位數字為 6 的 72 位數。

隨堂

回答以下各小題：

(1) $4^{40}\times 3^{100}$ 是幾位數？最高位數字為何？

(2) 將 0.4^{100} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為0的數字？此不為0的數字為何？

解：

(2) 因為 $0.4^{100}=\left(10^{\log 0.4}\right)^{100}=10^{100(\log 2-\log 5)}$

$$\approx 10^{-39.79}$$

$$=10^{0.21}\times 10^{-40}$$

$$\approx \boxed{1}.6\times 10^{\boxed{-40}}$$

由上式可知將 0.4^{100} 表示小數時，

從小數點後第40位開始出現不為 0 的數字，此數字為 1。

日本發行了一本書《2017年最大質數》，

全書僅印了一個質數 $2^{77232917}-1$。

仿照例題9的方法可求得其位數為23249425，

如果一頁印約32350個數字的話，

就能在書本印製前估計其頁數為719頁。

相較於碳14的半衰期約為5700年，碳15的半衰期短得許多，僅有約2.4秒。那麼，1分鐘後，碳15的數量會衰變至約為原來數量的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ 倍，而20分鐘後，它的數量會衰變至約為原來數量的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{25\times 20}=0.5^{500}$ 倍，

也就是例題9中第(3)小題的這個數。